

1.- Se considera el método de Runge-Kutta definido por la tabla de Butcher siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Se pide:

- i) Escribir las ecuaciones del método. Expresándolas en la forma  $y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n; h)$  y suponiendo que  $f$  es lipschitziana con respecto a  $y$ , probar que la función  $\Phi$  es lipschitziana con respecto a  $y$ . (1 punto)
- ii) Hallar el orden del método. (0.75 puntos)
- iii) Aplicar un paso del método a la ecuación  $y' = t + y$ . (0.5 puntos)

2.- Sea la fórmula de cuadratura

$$\int_0^b f(x) dx \approx \frac{4}{3}h (2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3))$$

donde  $h = b/4$ ,  $x_j = j h$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

- i) Hallar su grado de precisión. Reponder razonadamente si la fórmula es de tipo interpolatorio de Newton-Côtes o gaussiana. (1.25 punto)
- ii) Sabiendo que la fórmula es del tipo

$$\int_0^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^{n-1} b_i f(i h) + h^{p+2} M f^{(p+1)}(\eta h),$$

donde  $p$  es su grado de precisión y  $M$  una constante, hallar el valor de  $M$ . Hallar una expresión del error en la fórmula inicial. (1.25 punto)

3.- Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

- i) Hallar una matriz de Householder  $H$  tal que  $H A$  sea triangular. (1.25 punto)
- ii) Aplicar una etapa del método de Jacobi para obtener una matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^T A P$  sea diagonal. (1 punto)
- iii) Deducir del apartado anterior los valores propios de  $A$  y una base de vectores propios. (1 punto)

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0.5	0.3472222222	0.3572970310	0.3573315906	0.3573315911	0.3573315911
1.5	1.470238095	1.468923827	1.468921319	1.468921319	1.468921319

Tabla 1: Newton-Raphson

- 4.- Para hallar las raíces del polinomio  $p(x) = x^4 + x^2 - 6x + 2$ , se ha aplicado el método de Newton-Raphson con una tolerancia  $tol = 0.3 * 10^{-9}$  y un número máximo de iteraciones igual a 100. Partiendo de los puntos 0.5 y 1.5 el algoritmo se detiene en la quinta iteración, obteniéndose la tabla 1, mientras que si se comienza con  $x_0 = 1$ , el algoritmo se para nada más comenzar. Explicar el comportamiento de este método en los tres casos. (2 puntos)