Cálculo Numérico (Ingeniería Industrial)

Segunda convocatoria: 21–Junio–2002

Problema 1: Se considera la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq b_1 f(x_1) + b_1^* f(-x_1) + b_2 f(x_2) + b_2^* f(-x_2),$$

con $0 < x_1 < x_2 \leq 1$.

a) Demostrar que si la fórmula es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que 4, entonces también es exacta para los polinomios de grado 5. *(1.5 ptos)*

b) Para los nodos $x_1 = 1/3$ y $x_2 = \sqrt{11/15}$, ¿Podría ser la fórmula anterior de orden 6? *(1 pto)*

Problema 2: Dada la función $f(x) = 1/x$ y los nodos $x_0 = 1, x_1 = 2$ y $x_2 = 3$, se pide:

a) Construir el polinomio de interpolación $p_2(x)$, de $f(x)$, con los nodos dados, en la forma de Newton. *(0.75 ptos)*

b) Determinar las constantes a_0, a_1, b_0, b_1, b_3 y c para que la función

$$s(x) = \begin{cases} a_0 + a_1(x-1) + (13/18)(x-1)^2 - (2/9)(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2, \\ b_0 + b_1(x-c) + (1/18)(x-c)^2 + b_3(x-c)^3, & 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

sea el spline cúbico con condiciones de contorno: $s'(1) = -1$ y $s'(3) = -1/9$, que interpola a f en los nodos dados. *(0.75 ptos)*

c) Estimar el valor de $f(1.5)$ mediante $p_2(x)$ y $s(x)$. ¿Con cuál de estas aproximaciones se obtiene mejor resultado? *(0.25 ptos)*

d) Si añadimos un nodo más, $x_3 = 4$, determinar el polinomio de interpolación, $p_3(x)$, de f. ¿Se obtiene con $p_3(x)$ mejor aproximación del valor de $f(1.5)$ que las obtenidas en el apartado anterior? *(0.75 ptos)*

Problema 3: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Aplicar una iteración del método de Jacobi (para calcular los valores propios de una matriz) y obtener los valores propios de A. *(1 pto)*

b) Calcular 3 iteraciones con el método de la potencia partiendo del vector inicial $x_0 = (0, 1, 1)^T$. ¿Converge al valor propio dominante? Explica que ocurre. *(1 pto)*

c) Encontrar una matriz de Householder H tal que HA sea triangular y determinar la factorización QR de A. *(1 pto)*

Cuestión Práctica: La ecuación $f(x) = x^2 - 9 = 0$ se puede expresar en la forma equivalente $x = g(x)$ con

$$\text{i) } g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{9}{x}\right), \qquad \text{ii) } g(x) = \frac{x+9}{x+1}.$$

Para encontrar una raíz de la ecuación anterior se considera el método iterativo

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Estudiar en cuales de los dos casos se puede asegurar la convergencia del método a alguna de las raices de la ecuación. En los casos en que se pueda asegurar la convergencia, determinar el orden de convergencia que presenta el método. *(2 ptos)*