Cálculo numérico (Ingeniería Industrial Plan 94)

13 junio 2001 Primera convocatoria (junio)

Ejercicio 1

a) Calcular, trabajando con una precisión de dos cifras decimales, la factorización de Cholesky $A = L\,L^T$ para la matriz de Hilbert

$$A = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,\ldots,n}, \quad n = 3$$

(1 punto)

b) Comparar los resultados numéricos con los valores exactos

$$l_{jk} = \frac{\sqrt{2k-1}\,(j-1)!\,(j-1)!}{(j-k)!\,(j+k-1)!}.$$

¿Cuántas cifras son exactas?. *(0.5 puntos)*

c) Si $\widehat{L}$ denota el resultado numérico, calcular el residuo $A - \widehat{L}\,\widehat{L}^T$. ¿Se puede sacar alguna conclusión sobre la matriz A y la factorización de Cholesky?. *(0.5 puntos)*

Ejercicio 2 Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 10x - x^2 - y^2 = 8 \\ 10y - xy^2 - x = 8 \end{array}\right\}$$

a) Probar que tiene una solución única en el conjunto

$$D = \{(x,y) |\, 0 \leq x, y \leq \frac{3}{2}\}.$$ (1 punto)

b) Aplicar "una vez y media" el método de Newton para el cálculo aproximado de la solución, partiendo del punto inicial $(0,0)$. *(1 punto)*

Ejercicio 3

a) Probar que el polinomio cuadrático $p(x)$ que interpola una función $f(x)$ en tres nodos igualmente espaciados, x_0, x_1, x_2 del intervalo [1, 2] existe y es único. *(0.75 puntos)*

b) Obtener una cota del error de interpolación en función de $h = x_{k+1} - x_k$, si la función es $f(x) = \ln x$. *(1 punto)*

c) Utilizando tres nodos a elección del usuario, obtener una aproximación de $\ln(\frac{3}{2})$. Mejorar dicho valor añadiendo otro nodo más y explicar la mejora obtenida. *(1.25 punto)*

Ejercicio 4

a) Obtener razonadamente una fórmula de cuadratura de Newton-Côtes abierta con dos nodos interiores. ¿Coincide con alguna fórmula conocida?. *(1 punto)*

b) ¿Cuál es el orden de precisión de la fórmula obtenida en el apartado anterior?, justifícarlo. *(1 punto)*

c) Se podría utilizar la fórmula anterior para resolver el problema de valor inicial siguiente:

$$y' = 1 - y + t, \quad t \in [1,2], \quad y(1) = 1.$$

Caso de que se pudiera utilizar, ¿se podría escribir la fórmula resultante en la forma de Butcher?. *(1 punto)*

Soluciones

1. (a) Realizando todas las operaciones con 2 cifras decimales exactas, es decir, redondeando a la 2a cifra, y utilizando el algoritmo de Iserles para obtener la factorización $A = L\,L^T$ se obtiene:
$$L = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.28 & 0 \\ 0.33 & 0.28 & 0.1 \end{bmatrix},$$
   (b) Aplicando la fórmula que se nos ofrece, resulta
$$L_{exacta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/(2\sqrt{3}) & 0 \\ 1/3 & 1/(2\sqrt{3}) & 1/(6\sqrt{5}) \end{bmatrix},$$
   por lo que la diferencia :
$$L - L_{exacta} = \begin{bmatrix} 0. & 0 & 0 \\ 0. & 0.711325 & 0 \\ -0.00333333 & 0.711325 & 0.925464 \end{bmatrix},$$
   luego, a medida que nos alejamos del elemento (i, j),el número de cifras coincidentes se reduce hasta cero.
   (c)
$$A - \tilde{L}\,\tilde{L}^T == \begin{bmatrix} 0. & 0 & 0.00333 \\ 0. & 0.00493 & 0.0066 \\ 0.00333 & 0.0066 & 0.0027) \end{bmatrix},$$
   luego, el residuo es del orden de la primera cifra despreciada. La factorización de Cholesky, a pesar de que la matriz A está mal condicionada, es estable a errores de redondeo.

2. (a) Basta ver que se cumple el teorema 10.6 de Burden (p. 547). Para ello se puede definir la función
$$g(x, y) = ((8 + x^2 + y^2)/10,\ (8 + xy^2 + x)10)$$
   y comprobar que: 1) $g(D) \subset D$ (observar que las dos componentes de g son crecientes y menores que 3/2 en D); 2) la derivadas paraciales de g con respecto a x y a y están acotadas en D por K = 9/10 < 1, pues
$$J(g(x, y)) = \begin{bmatrix} x/5 & y/5 \\ (1 + y^2)/10 & xy/5 \end{bmatrix},$$

3. (a) Basta tener en cuenta el teorema de existencia y unicidad de interpolación de Lagrange y que los nodos, al ser equiespaciados, son distintos; además, es preciso tener en cuenta que los nodos deben pertenecer al intevalo [1, 2]
   (b) El error de interpolación de Lagrange con 3 nodos está dado por (ver T. 3.3 Burden, p. 101):
$$E(f) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{(3!}\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$
   Como $f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{x^3} \leq 2$, resulta
$$E(f) = \frac{1}{3}\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$
   por lo tanto, conviene que los nodos estén muy próximos al punto de evaluación si se quiere que el error sea pequeño, tanto si son equidistnates como si no lo son.

(c) Tomando nodos suficientemente cercanos a $3/2$, se puede: i) construir el polinomio de Newton con tres nodos y después añadir un cuarto, o bien, ii) aplicar el algoritmo de Neville.

4. (a) Por ejemplo, se puede considerar el polinomio de interpolación en los nodos interiores x_1, x_2 considerando nodos ficticios $x_0 = a, x_3 = b$ e integrar dicho polinomio en el intervalo $[a, b]$, en la forma siguiente:

$$I(f) = \int_a^b p_1(x)\,dx + \int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!}\,(x - x_1)(x - x_2)\,dx$$

tomando $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 a + 2h, x_3 = a + 3h$ y $x = x_0 + s\,h$, resulta

$$I(f) = \frac{3h}{2}(f_1 + f_2) + \frac{3h^3}{4} f^{(2)}(\xi_x)$$

.

(b) Basta comprobar que el error se anula para todo polinomio de grado ≤ 1 y no se anula para grado mayor que 1; luego el orden es 1.

(c) Se pueden integrar los dos miembros de la ecuación en el intervalo $[t_k, t_{k+3}]$ para obtener:

$$y(t_{k+3}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+3}} f(t, y(t))\,dt$$

y sustituir la integral por su aproximación dada en el apartado anterior, resultando

$$y_{k+3} = y_k + \frac{3h}{2}\,(f_{k+1} + f_{k+2})$$

si se pone $f_{k+1} = f(t_k + h, y_{k+1}), f_{k+2}) = f(t_k + 2h, y_{k+2})$.
Evidentemente, la fórmula resultante no es una fórmula de Runge-Kutta, sino una fórmula multipaso, y no se puede escribir en la forma de Butcher.