# Cálculo numérico (Ingeniería Industrial)

6-2-2006 Primera convocatoria

---

**Ejercicio 1**

Dada la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

se pide:

**a)** Aplicar el método de Jacobi para diagonalizar la matriz A (anulando los coeficientes $a_{12}, a_{13}, 1_{23}$, en este orden) y obtener sus valores propios. *(1.75 puntos)*

**b)** Partiendo del vector inicial $x_0 = (1, 0, 0)^T$, calcular tres iteraciones con el método de la potencia. *(0.5 puntos)*

¿Por qué se produce la convergencia al valor propio dominante de forma tan rápida? *(0.5 puntos)*

**Ejercicio 2** Dada una función $f \in C^3(\mathbb{R})$, los nodos $x_0 = 0$ y $x_1 = h$, con $h > 0$, y los valores de la función $f(x_0), f(x_1)$ y $f'(x_1)$, se pide:

**a)** Calcular el polinomio de interpolación de $f(x)$ utilizando los nodos anteriores. *(1 punto)*

**b)** Aproximando la función por el polinomio de interpolación calculado, obtener la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio

$$\int_0^h f(x)\, dx \approx \frac{h}{3} [f(0) + 2\, f(h)] - \frac{h^2}{6} f'(h),$$

y determinar su grado de precisión. *(1 punto)*

**c)** Aproximando la función por el polinomio de interpolación calculado, obtener la fórmula

$$f\text{`}''(0) \approx \frac{2}{h^2} [f(0) - f(h) + hf'(h)]$$

*(0.5 puntos)*

**Ejercicio 3** Para la resolución del PVI

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se consideran los siguientes métodos numéricos:

**m1)**

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\, f(t_n, y_n)))$$

**m2)**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+h\, f(t_n, y_n)))} \frac{h}{2}\, f(t_n, y_n)))$$

se pide:

¿Son estos métodos de tipo Runge-Kutta?. En caso afirmativo, escribir la tabla de coeficientes correspondiente y calcular el orden. *(1 punto)*

**b)** Comprobar que ambos métodos dan las mismas aproximaciones al aplicarlos al PVI

$$\begin{cases} y' = -y + t + 1, \quad t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

*(1 punto)*

**c)** Calcular la aproximación a la solución de este PVI que dan ambos métodos en el instante $t = 0.2$ con paso $h = 0.1$ *(0.75 puntos)*

**Cuestión práctica**

Se considera la función de iteración

$$g(x) = \frac{x^2 + c}{2}$$

con $c \in \mathbf{R}$

**a)** Para cada valor de $c$, determinar si existen puntos fijos de $g$ y, en caso afirmativo, hallarlos. *(0.5 puntos)*

**b)** Para $c = 3/4$, dar los puntos fijos de $g$ y probar que la sucesión $x_{n+1} = g(x_n), n \geq 0$, converge, para cualquier $x_0 \in [-3/4, 3/4]$, a un punto fijo. *(0.75 puntos)*

**c)** Para el mismo valor de $c$ del apartado anterior y tomando como punto inicial $x_0 = 1/4$, ¿cúal es el mínimo número de iteraciones (sin calcularlas) necesarias para que el error absoluto de la aproximación obtenida, $x_n$, sea menor que $10^{-3}$? *(0.75 puntos)*

## Soluciones

1.a) $A_0 = A$, k=1, anular $a_{12}$, como $a_{11} = a_{22} \Rightarrow c = s = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, luego:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = Q^T A_0 Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

k=2, anular $a_{23}$, como $a_{11} \neq a_{22} \Rightarrow \beta = \dfrac{a_{22} - a_{33}}{2a_{23}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $\quad t = \beta + \sqrt{\beta^2 + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $s = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, luego:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}, \quad A_2 = Q^T A_0 Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Por lo que los valores propios son: $t_1 = 3, m_1 = 2$ y $t_2 = 0, m_2 = 1$

1.b) $x_0 = (1, 0, 0) \Rightarrow i = 1, y = A\,x_0 = (2, -1, -1) \Rightarrow \mu = 2, \quad x_1 = (1, -1/2, -1/2)$ $i = 1, y = A\,x_1 = (3, -3/2, -3/2) \Rightarrow \mu = 3, \quad x_2 = (1, -1/2, -1/2)$

$i = 1, y = A\,x_2 = (3, -3/2, -3/2) \Rightarrow \mu = 3, \quad x_3 = (1, -1/2, -1/2)$

La velocidad de convergencia depende del cociente $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0$, luego: $\mu_{k+1} = \lambda_1 + \mathcal{O}(|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}|^k) = \lambda_1$ a partir de la primera iteración.

2.a) Como se tienen tres datos, se podrá construir un polinomio de interpolación de segundo grado: $p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x(x-h)$. Este debe debe interpolar a los datos, es decir,

$$\begin{array}{l} f(0) = p(0) = a_0 \\ f(h) = p(h) = a_0 + a_1\,h \\ f'(h) = p'(h) = a_1 + a_2\,h \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} a_0 = f(0), \ a_1 = \dfrac{f(h) - f(0)}{h}, \\ a_2 = \dfrac{h\,f'(h) - f(h) + f(0)}{h^2} \end{array}$$

2.b) Sustituyendo el integrando por el polinomio de interpolación resulta:

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \int_0^h p(x)\,dx = h\,f(0) + \frac{h^2}{2}\frac{f(h) - f(0)}{h} - \frac{h^3}{6}\frac{hf'(h) - f(h) + f(0)}{h^2} =$$

$$= \frac{h}{3}[f(0) + 2f(h)] - \frac{h^2}{6}\,f'(h)$$

Por ser de tipo interpolatorio y p(x) de grado 2, tiene grado de precisión al menos 2. Probemos si tiene grado 3, es decir, si es exacta para $f(x) = x^3$.

$$\int_0^h x^3\,dx = \frac{h^4}{4} \neq \frac{h}{3}[0 + 2h^3] - \frac{h^3}{6}(3h^2) = \frac{h^4}{6}$$

Por lo tanto, el orden es p = 2.

2.c)

$$f(x) \approx p(x) \Rightarrow f''(x) \approx p''(x) \Rightarrow f''(0) \approx p''(0) = \frac{2}{h^2}[hf'(h) - f(h) + f(0)]$$

3.a)

$m1)$

$$\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + hg_2 \\ g_1 = f(t_n, y_n) \\ g_2 = f(t_n + h/2, y_n + h/2\,g_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array},$$

$m2)$

$$\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(g_1 + g_2) \\ g_1 = f(t_n, y_n) \\ g_2 = f(t_n + h, y_n + h\,g_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Los dos métodos son explícitos de 2 etapas y de orden 2.

3.b)

$$m1) y_{n+1} = y_n + h(-y_n + \frac{h}{2}(-y_n + t_n) + t_n + 1)$$

$$m2) y_{n+1} = y_n + h(-y_n + t_n + 1 - \frac{h}{2}(-y_n + t_n))$$

3.c)

$$y_1 = 1 + 0.1(-1 + 1 - 0.1/2(-1)) = 1.005$$
$$y_2 = 1.005 + 0.1(-1.005 + 0.1 + 1 - 0.1/2(-1.005 + 0.1)) = 1.019025$$

4.a) $\alpha$ es punto fijo si $\alpha = g(\alpha)$, es decir, si $\alpha = \frac{\alpha^2 + c}{2} \Rightarrow \alpha = 1 \mp \sqrt{1-c}$

Por lo tanto, solo existirán puntos fijos si $1 - c \geq 0$. En concreto, si c = 1, hay un punto fijo doble; si $1 - c > 0$ habrá dos puntos fijos

4.b) Para $c = 3/4$, $\alpha_1 = 1 - \sqrt{1 - 3/4} = 1/2, \alpha_2 = 3/2$.

*) $g(I) \subset I$: $\forall x \in I = [-3/4, 3/4]$, $\quad g(x) = x^2/2 + 3/8 \in I$

*) g es lipschitziana con $L < 1$: $\forall x, y \in I$, $|g(x) - g(y)| = \frac{1}{2}|x^2 - y^2| = \frac{1}{2}|x + y|\,|x - y| \leq \frac{1}{2}\frac{6}{4}\,|x - y| = \frac{3}{4}\,|x - y| \Rightarrow L = 3/4 < 1$

Otra forma: como g es derivable, $|g'(x)| = |x| < 3/4, \forall x \in I \Rightarrow L = 3/4$.

Luego se cumplen las dos condiciones para convergencia a $\alpha_1 = 1/2$ en el intervalo I.

4.c) Como $|x_n - \alpha| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq 10^{-3}$, $x_0 = 1/4, L = 3/4$, $x_1 = g(x_0) = 13/32$.

En consecuencia, $n > 22.3780$, es decir, se necesitan 23 iteraciones.