Cálculo numérico (Ingeniería Industrial)

2 de febrero de 2004 Primera convocatoria (febrero)

Nota: La resolución de sistemas lineales, el cálculo de inversas y el cálculo de valores propios, en su caso, debe hacerse expresamente; no basta con poner el resultado que da la calculadora.

Ejercicio 1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

1. a) Sin calcular los valores propios $\lambda, i = 1, 2, 3$, de A, encontrar dos constantes C_1 y C_2 tales que $C_1 \leq \lambda_i \leq C_2, i = 1, 2, 3$. *0.5 puntos*

1. b) Obtener una aproximación del valor propio de A más próximo a $C_2 - 1$, efectuando una iteración del método adecuado, partiendo del vector $y^{(0)} = (1, 2, 0)^T$. *1.25 puntos*

1. c) Aplicar una iteración del método de Jacobi para el cálculo apoximado de los valores propios de A, para obtener una matriz $B = (b_{ij})$ que tenga nulos los elementos b_{12} y b_{21}. *1.25 puntos*

Ejercicio 2

Dada la función $f(x) = \ln x$ y los nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, y $x_3 = 4$, se pide:

2. a) Escribir la tabla de diferencias divididas redondeando a 6 cifras decimales. *0.5 puntos*

2. b) Construir el polinomio $p_3(x)$ de interolación de Newton de $f(x)$ en los nodos dados y dar una expresión del error en [1, 4]. *1 punto*

2. c) Probar que $p_3(x) > \ln x$, para cada $x \in (2, 3)$. *1 punto*

Ejercicio 3

Se considera la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx b_0\, f(-c) + b_1\, f(c)$$

3.a) Determinar b_0, b_1 y c para que esta fórmula de cuadratura tenga el mayor grado de precisión posible. *0.75 puntos*

3. b) Sea p el grado de precisión encontrado en a). Sabiendo que el error de la fórmula de cuadratura obtenida es del tipo

$$R(f) = M\, f^{(p+1)}(\xi), \quad \xi \in [-1, 1],$$

determinar el valor de la constante delerror M. *0.75 puntos*

3. c) A partir de la fórmula de cuadratura dada, encontrar una fórmula que calcule la integral

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

con la mayor precisión posible. *1 punto*

Ejercicio 4. Cuestión práctica

4. a) Probar que para una matriz cuadrada cualquiera A, $\kappa(A) \geq 1$, donde $\kappa(A)$ representa el condiconamiento o número de condición de la matriz A respecto de una norma matricial inducida o subordinada a una vectorial. *0.5 puntos*

4. b) Si la matriz A está mal condicionada, ¿qué algoritmo se recomendaría para resolver el sistem $A\,x = b$. *0.5 puntos*

4. c) Calcular $\kappa(A)$ respecto de la norma $\|.\|_\infty$, siendo $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1,2,3.$$

1 punto

Soluciones

1. a) Los círculos de Gershgorin son los siguientes:

$$B(4,2), \quad B(4,2), \quad B(4,2)$$

Puesto que la matriz es simétrica, sus valores propios son reales.

Luego los valores propios están en la intersección de las tres bolas (son iguales) con el eje real, es decir,

$$\lambda_j \in (2,6), \quad \text{o bien,} \quad C_1 = 2 \le \lambda_j \le C_2 = 6$$

1. b) El método que debe utilizarse es el de la potencia inversa con desplazamiento $q = C_2 - 1 = 5$, es decir, el método de la potencia aplicado con la matriz $D = A - 5\,I$.

Para $k = 0$, tomamos $x^{(0)} = (1,2,0) \Longrightarrow p_0 = 2, u = \dfrac{x^{(0)}}{x^{(0)}_{p_0}} = (1/2, 1, 0)$

Para $k = 1$, resolvemos el sistema: $D\,y = u \Longrightarrow y = (1/2, 1/4, 3/4) \Longrightarrow \mu = y_{p_0} = 1/4 \Longrightarrow$

$$\lambda = q + \frac{1}{\mu} = 5 + 4 = 9$$

Tras 4 iteraciones se obtiene: $\lambda = 6.0588$

1. c) El método de Jacobi para el cálculo de valores propios de una matriz simétrica consiste en realizar rotaciones de Givens para obtener ceros en los elementos de fuera de la diagonal, eligiendo para ser anulado el elemento de mayor valor absoluto.

En el ejercicio se pide anular los elementos (1, 2) y (2, 1). Debemos escoger una matriz de rotación de la forma

$$\Omega = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $a_{11} = a_{22}$, hay que tomar $c = s = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Como Ω es ortogonal, coincide con su inversa, Ω^{-1}, así que la matriz

$$B = \Omega^{-1}\,A\,\Omega = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

es semejante a A, luego tiene los mismos valores y vectores propios, y tiene los elementos $b_{12} = b_{21} = 0$. También, de paso, se han anulado los elementos $b_{13} = b_{31}$, aunque no tiene por qué ocurrir siempre.

2. a)

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
x_0 = 1 & f[x_0] = 0 & & & \\
x_1 = 2 & f[x_1] = 0.693147 & f[x_0, x_1] = 0.693147 & & \\
x_2 = 3 & f[x_2] = 1.098612 & f[x_1, x_2] = 0.405465 & f[x0, x_1, x_2] = -0.143841 & \\
x_3 = 4 & f[x_3] = 1.386294 & f[x_2, x_3] = 0.287682 & f[x_1, x_2, x_3] = -0.058892 & f[x_1, x_1, x_2, x_3] = 0.028316
\end{array}$$

2. b)

$$p_3(x) \simeq 0.693147\,(x-1) - 0.143841\,(x-1)\,(x-2) + 0.028316\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$$

El error de interpolación es:

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4), \quad \forall x \in [1,4], \quad \xi_x \in (1,4)$$

En este caso,

$$f(x) = \ln x, \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4},$$

por lo que,

$$f(x) - p_3(x) = \frac{-1}{4\,\xi_x^4}\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4), \quad \forall x \in [1,4], \quad \xi_x \in (1,4)$$

2. c)

$$\forall x \in (2,3), \quad x-1>0, \quad x-2>0, \quad x-3<0, \quad x-4<0,$$

luego,

$$f(x) - p_3(x) = \frac{-1}{4\,\xi_x^4}\,(x-1\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4) < 0, \quad \forall x \in (2,3),$$

es decir,

$$p_3(x) > f(x), \forall x \in (2,3)$$

3. a) Imponiendo las sucesivas condiciones de exactitud queda:

$$\begin{array}{l}
f(x) = 1 : \int_{-1}^{1} 1\,dx = b_0 + b_1 \Longrightarrow b_0 + b_1 = 2 \\
f(x) = x : \int_{-1}^{1} x\,dx = -c\,b_0 + c\,b_1 \Longrightarrow -b_0 + b_1 = 0,
\end{array}$$

es decir, $b_0 = b_1 = 1$

$$\begin{array}{l}
f(x) = x^2 : \int_{-1}^{1} x^2\,dx = b_0\,c^2 + b_1\,c^2 \Longrightarrow 2\,c^2 = 2/3 \Longrightarrow c = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\
f(x) = x^3 : \int_{-1}^{1} x^3\,dx = -b_0\,c^3 + b_1\,c^3 \Longrightarrow 0 = 0, \forall c \\
f(x) = x^4 : \int_{-1}^{1} x^4\,dx = -b_0\,c^4 + b_1\,c^4 \Longrightarrow 2/5 = 2\,c^4, \text{que no se cumple}
\end{array}$$

Luego, grado de precisión: $p = 3$.

3. b)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) + M\,f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [-1,1]$$

$$f(x) = x^4 : \int_{-1}^{1} x^4\,dx = -(\frac{\sqrt{3}}{3})^4 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^4 + M\,4! \Longrightarrow M = \frac{1}{135}$$

3. c) Haciendo el cambio de variable:

$$\begin{array}{c}
[-1,1] \longrightarrow [a,b] \\
x \hookrightarrow t = \alpha\,x + \beta \\
\alpha = (b-a)/2, \beta = (a+b)/2
\end{array}$$

$$\int_a^b (t)\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}\,x + \frac{b+a}{2}) \simeq \frac{b-a}{2}\left[f(\frac{b-a}{2}\,\frac{-\sqrt{3}}{3} + \frac{b+a}{2}) + f(\frac{b-a}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{b+a}{2})\right]$$

4. a)

$$1 = \|I\| = \|A\,A^{-1}\| \leq \|A\|\,\|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

4. b) Puesto que el número de condición no depende del algoritmo que se utilice para resolver un sistema, el algoritmo recomendado será el que más convenga por el tamaño y la estructura de la matriz, es decir, cualquier algoritmo puede ser bueno. En esta ocasión, eliminación gaussiana para matrices tridiagonales sería el más adecuado.

4. c)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + 1/2 + 1/3, 1/2 + 1/3 + 1/4, 1/3 + 1/4 + 1/5\} = 11/6$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\{9 + 36 + 30, 36 + 192 + 180, 30 + 180 + 180\} = 408$$

Luego

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty\,\|A^{-1}\|_\infty = 748.$$