Cálculo Numérico (Ingeniería Industrial)

24 Febrero 2003 Primera convocatoria

Ejercicio 1

Se pretende resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = b$$

i) ¿Para qué valores de a el método de Gauss–Seidel es convergente? (1 pto.)

ii) Si $a = 1$, ¿es convergente el método de Jacobi? (0.75 ptos.)

iii) Si $a = 0$, ¿cuántas iteraciones necesita el método de Gauss–Seidel para determinar la solución del sistema lineal? (1 pto.)

Ejercicio 2

Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable.

i) Dado $t \in (0,1)$, obtener el polinomio p_t de grado ≤ 2 que interpola a f en los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = t$ y $x_2 = 1$ (0.75 ptos.)

ii) Calcular los polinomios límites P y Q cuando $t \to 0$ y $t \to 1$, respectivamente. Comprobar además que

$$\begin{aligned} P(0) &= Q(0) = f(0) \\ P(1) &= Q(1) = f(1) \\ P'(0) &= f'(0) \\ Q'(1) &= f'(1) \end{aligned}$$

(1 pto.)

iii) Sean ahora P y Q polinomios de grado $\leq (n+1)$ que interpolan a f en los puntos x_0, $x_1, \ldots, x_n$, verificando $P'(x_0) = f'(x_0)$ y $Q'(x_n) = f'(x_n)$. Demostrar que entonces existe un polinomio $\alpha(x)$ de grado ≤ 1 tal que el polinomio R de grado $\leq (n+2)$ definido por:

$$R(x) = \alpha(x)P(x) + (1 - \alpha(x))Q(x)$$

interpola a f en esos puntos, verificando además

$$R'(x_0) = f'(x_0), \quad R'(x_n) = f'(x_n)$$

(1 pto.)

Ejercicio 3

Se considera la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq b_1 f(\frac{1}{2}-\gamma) + b_2 f(\frac{1}{2}) + b_3 f(\frac{1}{2}+\gamma).$$

i) Determinar los pesos b_1, b_2 y b_3 para que tenga grado de precisión al menos 3 (1 pto.)

ii) Utilizando los nodos y los pesos determinados en el apartado anterior se pretende construir un método Runge–Kutta definido por la tabla de coeficientes

$$\begin{array}{c|ccc} 1/2-\gamma & \alpha & & \\ 1/2 & a_{21} & \beta & \\ 1/2+\gamma & a_{31} & b_2 & \alpha \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

con $\gamma = 1/3$. Determinar los coeficientes α, β, a_{21} y a_{31} para que dicho método tenga orden al menos 3 (1 pto.)

iii) Escribir las ecuaciones del método Runge–Kutta obtenido e indicar de qué tipo es (implícito, explícito, etc.) (0.5 ptos.)

Ejercicio 4. Cuestión Práctica

Se desea resolver numéricamente la ecuación $f(x) = x^2 - 2 = 0$.

i) Probar que en el intervalo $[1, 2]$ existe una única raíz $\overline{x}$ (0.5 ptos.)

ii) Razonar si la sucesión $\{x_n\}$ que genera el método de Newton es convergente a $\overline{x}$, partiendo de $x_0 = 2$. Efectuar 3 iteraciones del método y calcular el error relativo de la aproximación obtenida: $\left|\dfrac{\overline{x}-x_3}{\overline{x}}\right|$, con $\overline{x} = \sqrt{2}$ (1 pto.)

iii) Razonadamente: ¿podríamos asegurar la convergencia hacia $\overline{x}$ partiendo de $x_0 = 10^5$? (0.5 ptos.)

Soluciones

1.i)

$$A=\begin{bmatrix}1&a&0\\1&1&a\\1&1&1\end{bmatrix},M=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},M^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix},N=\begin{bmatrix}0&-a&0\\0&0&-a\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_{GS}=\begin{bmatrix}0&-a&0\\0&a&-a\\0&0&a\end{bmatrix},$$

$$\text{Det }(\lambda I-B_{GS})=-\lambda\,(\lambda-a)^2=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=a,\ \text{doble}\ \Rightarrow\rho(B_{GS}=|a|,$$

luego Gauss-Seidel será convergente si $\rho(B_{GS})=|a|<1$, es decir, si $-1<a<1$

1.ii) Para $a=1$,

$$B_J=\begin{bmatrix}0&-a&0\\-1&0&-a\\-1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix},$$

$$\text{Det }(\lambda I-B_J)=-(\lambda-1)\,(\lambda^2+\lambda-1)=0\Rightarrow$$

$$\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618,\lambda_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-1.618\Rightarrow\rho(B_J)=1.618$$

luego Jacobi no será convergente ya que $\rho(B_J)>1$

1.iii) Si $a=0$, $N=0\Rightarrow B_{GS}=0$; por lo tanto, el algoritmo se reduce a

$$\begin{array}{l}x_0\\x_{n+1}=B_{GS}\,x_n+M^{-1}\,b=M^{-1}\,b,n\geq 0,\end{array}$$

pero $x_1=M^{-1}\,b$ es la solución del sistema, luego solo se necesita una iteración.

2.i)

$$\begin{array}{c|c|c|c}0&f(0)&&\\t&f(t)&\dfrac{f(t)-f(0)}{t}&\\1&f(1)&\dfrac{f(1)-f(t)}{1-t}&\dfrac{\dfrac{f(1)-f(t)}{1-t}-\dfrac{f(t)-f(0)}{t}}{1-0}=\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}-\dfrac{f(t)-f(0)}{t},\end{array}$$

$$p_t(x)=f(0)+\frac{f(t)-f(0)}{t}\,x+[\frac{f(t)-f(1)}{t-1}-\frac{f(t)-f(0)}{t}]\,x\,(x-t)$$

2.ii)

$$P(x)=\lim_{f->0}p_t(x)=...=f(0)+f'(0)\,x+[f(1)-f(0)-f'(0)]\,x^2$$

$$Q(x)=\lim_{f->1}p_t(x)=...=f(0)+[f(1)-f(0)]\,x+[f(0)-f(1)+f'(1)]\,x\,(x-1)$$

Por lo tanto,

$$P(0)=f(0),\quad Q(0)=f(0),\quad P(1)=f(1),\quad Q(1)=f(1),\quad P'(0)=f'(0),\quad Q'(1)=f'(1)$$

2.iii) Basta comprobar que, bajo las hipótesis,

$$R(x_j) = \alpha(x_j)\, f(x_j) + (1 - \alpha(x_j)\, f(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, ..., n$$

$$R'(x_0) = [f'(x_0) - Q'(x_0)]\alpha(x_0) + Q'(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow \alpha(x_0) = 1 \qquad (*)$$

$$R'(x_n) = [P'(x_n) - f'(x_n)]\alpha(x_n) + f'(x_n) = f'(x_n) \Rightarrow \alpha(x_n) = 0 \qquad (**)$$

Como $\alpha(x) = a + b\, x$, el sistema (*)+(**) es compatible determinado, lo que implica:

$$\alpha(x) = \frac{x_n}{x_n - x_0} + \frac{x}{x_0 - x_n}$$

3.i) Las condiciones de exactitud para $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, 3$ proporciona el sistema:

$$\begin{aligned}
&b_1 + b_2 + b_3 = \textstyle\int_0^1 f(x)\, dx = 1\\
&b_1\,(1/2 - \gamma) + b_2/2 + b_3\,(1/2 + \gamma) = 1/2\\
&b_1\,(1/2 - \gamma)^2 + b_2/4 + b_3\,(1/2 + \gamma)^2 = 1/3\\
&b_1\,(1/2 - \gamma)^3 + b_2/8 + b_3\,(1/2 + \gamma)^3 = 1/4
\end{aligned}$$

que se resuelve fácilmente, resultando:

$$b_1 = b_3 = \frac{1}{24\gamma^2}, \quad b_2 = 1 - \frac{1}{12\gamma^2}, \quad \forall \gamma \neq 0$$

3.ii) Para $\gamma = 1/3$, resulta la tabla de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc}
1/6 & \alpha & & \\
1/2 & a_{21} & \beta & \\
5/6 & a_{31} & 1/4 & \alpha \\
\hline
 & 3/8 & 1/4 & 3/8
\end{array}$$

Para que el método RK tenga al menos orden 3 ha de cumplir:

$$\begin{aligned}
&A\,e = c \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1/6 \\ a_{21} + \beta = 1/2 \Rightarrow a_{21} = 1/2 - \beta \\ a_{31} + 1/4 + \alpha = 5/6 \Rightarrow a_{31} = 5/12 \end{array}\\
&b^T\, e = 1\\
&b^T\, c = 1/2\\
&b^T\, c^2 = 1/3\\
&b^T\, A\, c = 1/6 \Rightarrow b^T.(1/36, 1/12 + \beta/3, 1/3) = 1/6 \Rightarrow 5/32 + \beta/12 = 1/6 \Rightarrow \beta = 1/8\\
&\qquad\qquad \Rightarrow a_{21} = 3/8
\end{aligned}$$

Las ecuaciones 4, 5 y 6 se cumplen por el apartado ii)

3.iii) La tabla de Butcher del método RK obtenido es:

$$\begin{array}{c|ccc}
1/6 & 1/6 & & \\
1/2 & 3/8 & 1/8 & \\
5/6 & 5/12 & 1/4 & 1/6 \\
\hline
 & 3/8 & 1/4 & 3/8
\end{array}$$

En consecuencia, se trata de un RK semi-implícito o diagonalmente implícito, que suele denotarse por DIRK.

Las ecuaciones del método serán:

$$y_{n+1} = y_n + h\,[\frac{3}{8}\,g_1 + \frac{1}{4}\,g_2 + \frac{3}{8}\,g_3]$$

$$\begin{aligned} g_1 &= f(t_n + \frac{h}{6}, y_n + \frac{h}{6}\,g_1) \\ g_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\,[-\frac{5}{8}\,g_1 + \frac{9}{8}\,g_2]) \\ g_3 &= f(t_n + \frac{5\,h}{6}, y_n + h\,[\frac{5}{12}\,g_1 + \frac{1}{4}\,g_2 + \frac{1}{6}\,g_3]) \end{aligned}$$

4.i) $f(x) = x^2 - 2 = 0$. Como f es continua en el intervalo $[1,\, 2]$ y $f(1) = -1$ y $f(2() = 2$, resulta $f(1)\,f(2) < 0$, luego el teorema de Bolzano permite asegurar que hay al menos una solución en dicho intervalo.

Además, f es derivable en $[1,\, 2]$ y su derivada $f'(x) = 2\,x$ es positiva en dicho intervalo, es decir, es estríctamente creciente, luego existe una sola raiz en dicho intervalo.

4.ii) La iteración funcional $x_{n+1} = g(x_n)$ que constituye el algoritmo del método de Newton-Raphson está definida por la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \text{ y en este caso: } g(x) = x - \frac{x^2-2}{2\,x}$$

Observamos que la función g es contractiva, es decir, $g([1,2]) \subset [1,2]$ y que $g'(x) = 1/2 - 1/x^2 \leq 1/2 = L$, es decir, es también lipschitziana con constante de Lipschitz $L < 1$, en consecuencia, el teorema de convergencia global de la iteración funcional nor permite afirmar que para todo $x_0 \in [1,2]$ la iteración funcional del método de Newton-Raphson será convergente.

Otra forma. Teniendo en cuenta que g es derivable con constante de Lipschitz $L = 1/2$, podemos asegurar que también es contractiva viendo que

$$|g(\frac{1+2}{2}) - \frac{1+2}{2}| = |\frac{17}{12} - \frac{3}{2}| = \frac{1}{18} < (1-L)\frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Otra forma. Aplicar el teorema de convergencia del método de N-R: “Si se cumplen: a) $f \in \mathcal{C}^{(2)}[1,2]$; b) $f'(x) \neq 0$ en $[1,\, 2]$; c) $f''(x)$ no cambia de signo en $[1,\, 2]$; d) $f(x_0)\,f''(x_0) \geq 0$, entonces la sucesión construida con el método de Newwton-Raphson es convergente al punto fijo”. Se comprueba facilmente que se cumplen todas las condiciones.

Tres iteraciones:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= x_0 - \frac{x_0^2-2}{2\,x_0} = 1.5 \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1^2-2}{2\,x_1} = 1.414666667 \\ x_3 &= x_2 - \frac{x_2^2-2}{2\,x_1} = 1.41421569 \\ &\text{Error relativo: } \frac{|x-x_3|}{|x|} = 1.5018251 * 10^{-6} \end{aligned}$$

4.iii) Basta comprobar las condiciones de convergencia anteriores en el intervalo $[1,\, 50]$, que se cumplen y comprobarlo es trivial.

En 18 iteraciones se obtiene un error relativo de 10^{-7} y en 20 iteraciones, 10^{-16}.