CALCULO NUMERICO INDUSTRIALES

Primera convocatoria
7 Febrero 2001

1. Sea $a \in \mathbb{R}^+$, y $Ax = b$ el sistema de ecuaciones tal que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Sean B_G y B_J las matrices de iteración de los métodos de Gauss-Seidel y Jacobi respectivamente, aplicadas al sistema anterior.

(a) Hallar el radio espectral de B_J y deducir para qué valores de a converge. (1 punto)

(b) Probar que si $a \in (0, 4)$, la matriz B_G tiene dos valores propios complejos conjugados y uno real. Hallar el radio espectral de B_G. ¿Para qué valores de $a \in (0, 4)$ el método de Gauss-Seidel es convergente?.(1 punto)

2. Sea una fórmula RK de dos etapas y orden 3 cuyos coeficientes b_1, b_2 y c_2 se han obtenido de una fórmula de cuadratura de la forma

$$\int_0^1 \Phi(t)dt = b_1\Phi(0) + b_2\Phi(c_2)$$

que se sabe tiene grado de precisión 2.

(a) Determinar b_1, b_2, y c_2. Teniendo en cuenta que es un método RK de tipo semiimplícito o lo que es lo mismo diagonalmente implícito, obtener la tabla de coeficientes de la fórmula Runge-Kutta y escribir su ecuación.(1 punto)

(b) En el caso de $c_2 = 2/3$, $b_1 = 1/4$, $b_2 = 3/4$, calcular la función de estabilidad $R(z)$ y $\lim_{z\to-\infty} |R(z)|$. A la vista de los resultados ¿se puede asegurar que el método es A-estable?.(1 punto)

(c) Determinar el intervalo de estabilidad absoluta del método en el caso del apartado b). Si este método se aplica a la resolución numérica del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -1200y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

¿ Cómo tiene que ser el paso h para que el proceso de integración sea estable?.(1 punto)

3. Se consideran los siguientes polinomios:

$p_3(x)$, que interpola a $f(x)$ en x_0, x_1, x_2, x_3,
$p_2(x)$, que interpola a $f(x)$ en x_0, x_1, x_2,
$q_2(x)$, que interpola a $f(x)$ en x_1, x_2, x_3.

(a) Comprobar que

$$q_3(x) = q_2(x) + \frac{x - x_3}{x_3 - x_0}(q_2(x) - p_2(x))$$

interpola a $f(x)$ en x_0, x_1, x_2, x_3.(1 punto)

(b) Utilizando diferencias divididas y los siguientes datos

$$\begin{array}{llll} x_0 = 1, & f(x_0) = -3, & x_1 = 2, & f(x_1) = 1, \\ x_2 = 3, & f(x_2) = 3, & x_3 = 4, & f(x_3) = 5, \end{array}$$

calcular $p_3(x)$, $p_2(x)$, y $q_2(x)$.(1 punto)

(c) Utilizando el primer apartado calcular $q_3(x)$ y comprobar que coincide con $p_3(x)$.(1 punto)

4. (Cuestión) Se desea calcular dos raíces de la ecuación $x^3 - e^x + 3 = 0$. Para ello se quiere utilizar el método iterativo del punto fijo empezando a iterar en $x_0 = -1.4$ y en $x_0 = 4.6$. Para las siguientes funciones de iteración:

- $g_1(x) = \ln(x^3 + 3)$,
- $g_2(x) = (e^x - 3)^{1/3}$,
- $g_3(x) = x^3 - e^x + x + 3$.

Responde razonadamente si alguno de los puntos iniciales dados son adecuados y realiza dos iteraciones en los casos en los que sea posible. (2 puntos)