EJERCICIO 2.3.-

Se considera el sistema:

$$
\begin{aligned}
x + ay + a^2z + a^3t = a^4\\
x + by + b^2z + b^3t = b^4\\
x + cy + c^2z + c^3t = c^4\\
x + dy + d^2z + d^3t = d^4
\end{aligned}
$$

Resolverlo en el supuesto de que a, b, c, d son distintos.

RESOLUCIóN

```
Utilizamos la aplicación MATLAB

u=a

     1      a     a^2    a^3    a^4
     1      b     b^2    b^3    b^4
     1      c     c^2    c^3    c^4
     1      d     d^2    d^3    d^4
```

Con las siguientes operaciones elementales conseguimos ceros en la primera columna

```
i=1;j=2;lij=-u(j,i)/u(i,i);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;
i=1;j=3;lij=-u(j,i)/u(i,i);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;
i=1;j=4;lij=-u(j,i)/u(i,i);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;

     1      a       a^2       a^3       a^4
     0      b-a     b^2-a^2   b^3-a^3   b^4-a^4
     0      c-a     c^2-a^2   c^3-a^3   c^4-a^4
     0      d-a     d^2-a^2   d^3-a^3   d^4-a^4
```

Si $b \neq a, \quad c \neq a, \quad d \neq a$ se puede dividir cada ecuación por el coeficiente $b - a, c - a, d - a$, respectivamente, obteniendo

```
i=2;j=2;lij= 1/u(i,j);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;
i=2;j=3;lij= 1/u(i,j);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;
i=2;j=4;lij= 1/u(i,j);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;

     1      a       a^2        a^3          a^4
     0      1     b+a     b^2+ba+a^2   b^3+b^2 a +b a^2 + a^3
     0      1     c+a     c^2+ca+a^2   c^3+c^2 a +c a^2 + c^3
     0      1     d+a     d^2+da+a^2   d^3+d^2 a +d a^2 + d^3
```

Con las siguientes operaciones elementales conseguimos ceros en la segunda columna

```
i=2;j=3;lij= -u(j,i)/u(i,j);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;
i=2;j=4;lij= -u(j,i)/u(i,j);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;

     1      a     a^2        a^3               a^4
     0      1     b+a     b^2+ba+a^2      b^3+b^2 a +b a^2 + a^3
     0      0     c-b     (c-b)(a+b+c)    c^3-b^3 + (c^2-b^2) a + (c-b) a^2
     0      0     d-b     (d-b)(a+b+d)    d^3-b^3 + (d^2-b^2) a + (d-b) a^2
```

Si $c \neq b, \quad d \neq b$ se puede dividir cada ecuación por el coeficiente $c - b, d - b$, respectivamente, obteniendo

```
i=3;j=3;lij= 1/u(i,j);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;
i=3;j=4;lij= 1/u(i,j);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;

     1      a     a^2        a^3         a^4
     0      1     b+a     b^2+ba+a^2   b^3+b^2 a +b a^2 + a^3
     0      0     1         a+b+c      c^2+b^2+a^2+cb+ca+ba
     0      0     1         a+b+d      d^2+b^2+a^2+db+da+ba
```

Con la siguiente operación elemental conseguimos cero en la tercera columna

```
i=3;j=4;lij= -u(j,i)/u(i,j);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;

      1       a      a^2        a^3        a^4
      0       1      b+a    b^2+ba+a^2   b^3+b^2 a +b a^2 + a^3
      0       0      1        a+b+c      c^2+b^2+a^2+cb+ca+ba
      0       0      0         d-c      (d-c)(a+b+c+d)
```

Si $d \neq c$ se puede dividir la cuarta ecuación por el coeficiente $d - c$, obteniendo

```
i=4;j=4;lij= 1/u(i,j);e=pij(j,i,lij,4);u=e*u;

      1       a      a^2        a^3        a^4
      0       1      b+a    b^2+ba+a^2   b^3+b^2 a +b a^2 + a^3
      0       0      1        a+b+c      c^2+b^2+a^2+cb+ca+ba
      0       0      0          1        a+b+c+d
```

Podemos decir que si todos los parámetros son distintos, el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son iguales a 4, es decir, el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo realizamos sustitución hacia atrás, resultado:

```
t = a+b+c+d
z = - a b - a c -b c - a d - b d - c d
y = a b c + a b d + a c d + b c d
x = - a b c d
```