# EJERCICIO de cambio de coordenadas

Dada la base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vecores $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (1,0,1)$, encontrar la base $\{a_1, a_2, a_3\}$ tal que las ecuaciones del cambio de coordenadas vengan dadas por:

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 - 2y^3 \\ x^2 &= -y^2 + 5y^3 \\ x^3 &= y^1 - 3y^3 \end{aligned}$$

## RESOLUCIÓN

Llamaremos
X a la matriz columna de coordenadas de un vector genérico x respecto de la base $\{e_j\}$
Y a la matriz columna de coordenadas de un vector genérico x respecto de la base $\{a_k\}$
Z a la matriz columna de coordenadas de un vector genérico x respecto de la base natural.
La ecuación del cambio de coordenadas de la base natural a la $\{e_j\}$ será:

$$Z = P_1\,X, \text{ siendo} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación del cambio de coordenadas de la base $\{e_j\}$ está dada en el enunciado, es decir:

$$X = A\,Y, \text{ siendo} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La ecuación del cambio de coordenadas de la base natural a la $\{a_k\}$ será:

$$Z = P_2\,Y,$$

siendo $P_2$ la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $a_k$ respecto de la base canónica, es decir, los pedidos.

Así que sustituyendo la segunda en la primera e igualando queda:

$$Z = P_1\,A\,Y = P_2\,Y,$$

es decir,

$$P_2 = P_1\,A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, los vectores $a_k$ referidos a la base natural son:

$$a_1 = (2,1,2), \quad a_2 = (0,-1,-1), \quad a_3 = (-5,3,0)$$