EJERCICIO 6.-

Probar que $\mathbb{R}^n$ es la suma directa de los siguientes subespacios:

$$U = \{(x_1, ..., x_n)|x_1 + ... + x_n = 0\}, \quad W = \{(x_1, ..., x_n)|x_1 = ... = x_n\}$$

RESOLUCIÓN

Hemos de probar dos cosas: a) $\mathbf{R}^n = U + W$, b) la suma es directa.

a) $\mathbf{R}^n = U + W \iff$ i) $U + W \subset \mathbf{R}^n$ y ii) $\mathbf{R}^n \subset U + W$.

La condición i) se cumple siempre, ya que se ha probado que la suma de dos subespacios es otro subespacio.

Para probar la condición ii), hemos de ver que cualquier vector

$$v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbf{R}^n \Longrightarrow v \in U + W,$$

es decir, que

$$v = (v^1, \dots, v^n) = u + w = (u^1, \dots, u^{n-1}, -u^1 - \dots - u^{n-1}) + (w^1, \dots, w^1) =$$

$$= (u^1 + w^1, u^2 + w^2, \dots, u^{n-1} + w^1, -u^1 - \dots - u^{n-1} + w^1),$$

lo cual equivale a

$$\begin{array}{lcl} u^1 + w^1 & = & v^1 \\ u^2 + w^2 & = & v^2 \\ & \dots & \\ u^{n-1} + w^1 & = & v^{n-1} \\ -u^1 - \dots - u^{n-1} + w^1 & = & v^n \end{array}$$

que es un sistema compatible, ya que rg A = n; es decir, tiene solución o bien existen esos vectores u y w.

b) La suma es directa. En efecto, basta observar que el sistema anterior es compatible determinado, por lo que solo existe una única solución, es decir,

existen únicos $u \in U, \quad w \in W$ tales que $v = u + w$