

EJERCICIO 4.14 b.-

En \mathbb{R}^3 determinar, según el valor de $a \in \mathbb{R}$, el rango del siguiente sistema de vectores:
 $\{ (a, 1, 1), (-1, -a, -1), (-1, -1, a) \}$

RESOLUCIÓN

Es suficiente estudiar el rango de la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores dados, es decir,

```
syms a
M = [a 1 1;-1 -a -1;-1 -1 a]
[ a, 1, 1]
[ -1, -a, -1]
[ -1, -1, a]

u = M;
i=3;j=1;t=0;e=pij(i,j,t,3);u=e*u
[ -1, -1, a]
[ -1, -a, -1]
[ a, 1, 1]

i=2;j=1;t=-u(i,j)/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);u=e*u
[ -1, -1, a]
[ 0, 1-a, -1-a]
[ a, 1, 1]

i=3;j=1;t=-u(i,j)/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);u=e*u
[ -1, -1, a]
[ 0, 1-a, -1-a]
[ 0, 1-a, 1+a^2]
```

Si $1 - a$ no es cero,

```
i=3;j=2;t=-u(i,j)/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);u=e*u
[ -1, -1, a]
[ 0, 1-a, -1-a]
[ 0, 0, 2+a+a^2]
```

En consecuencia,

si $a \neq 1$, $\text{rg } A = 3$, ya que el polinomio $2 + a + a^2$ no se anula, pues sus raíces son complejas.
si $a = 1$, la penúltima matriz obtenida se convierte en

```
[ -1, -1, 1]
[ 0, 0, - 2]
[ 0, 0, 2]
```

que, evidentemente, tiene $\text{rg } A = 2$.