EJERCICIO 4.10.-

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios:

$$S = \{(x_1, ..., x_4\} | \, x_1 - x_2 = 0, \; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, \quad T = \mathbb{R}\{(1, 1, 2, 1), (2, 0, -1, 1)\}.$$

Hallar bases y dimensiones de $S, T, S + T$ y $S \cap T$.

RESOLUCIóN

Utilizamos la aplicación MATLAB
Buscamos una familia generadora del subespacio S.

$$\forall x \in S, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_3, x_4) = x_1\,(1, 1, 0, 0) + x_3\,(0, 0, 1, 0) + x_4\,(0, 0, 0, 1)$$

por lo que la familia $\{v_1 = (1, 1, 0, 0),\ v_2 = (0, 0, 1, 0),\ v_3 = (0, 0, 0, 1)\}$ es una familia generadora de S.

Construimos las matrices S y T que tienen por columnas las coordenadas de los vectores generadores de los subespacios S y T, respectivamente. Y calculamos su rango. Este será la dimensión.

```
s =
     1     0     0
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

rref(s)
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
     0     0     0

t =
     1     2
     1     0
     2    -1
     1     1

rref(t)
     1     0
     0     1
     0     0
     0     0
```

Por lo tanto, dim S = 3 y dim T = 2. Una base de S es, por ejemplo, la constituida por $\{v_1, v_2, v_3\}$ y una base de T es la constituida por $\{w_1 = (1, 1, 2, 1), w_2 = (2, 0, -1, 1)\}$.

Analicemos el subespacio suma S + T. Una familia generadora está compuesta por la unión de las dos familias $\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$. Construimos la matriz asociada y hacemos reducción por filas

```
smt =
     1     0     0     1     2
     1     0     0     1     0
     0     1     0     2    -1
     0     0     1     1     1

rref(smt)
     1     0     0     1     0
     0     1     0     2     0
     0     0     1     1     0
     0     0     0     0     1
```

Observamos que la suma está engendrada, por ejemplo, por la familia $\{v_1, v_2, v_3, w_2\}$ que es libre, luego una base de la suma. Su dim (S + T) = 4. Es decir, coincide con $\mathbf{R}^4$.

Analicemos el subespacio intersección $S \cap T$. Como un vector $x \in S \cap T$ si $x \in S$ y $x \in T$, es decir, si

$$x = s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 = t_1 w_1 + t_2 w_2$$

basta resolver el sistema homogeneo de cuatro ecuaciones y cinco incógnitas resultante cuya matriz de coeficientes es la smt.

Para resolver el sistema homogeneo construimos la matriz transpuesta de smt, la ampliamos con la matriz unidad y hacemos reducción por filas de la matriz resultante; las filas de la matriz anteriormente ocupada por la unidad que se corresponden con las filas de ceros de la ocupada por smt constituyen un sistema generador del subespacio solución. Veamoslo:

```
h=[smt',eye(5)]

h =
     1     1     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     1     0     0     1     0     0
     1     1     2     1     0     0     0     1     0
     2     0    -1     1     0     0     0     0     1

rref(h)
    1     0     0     0     0     0.5    -0.5    0     0.5
    0     1     0     0     0    -2.5    -0.5    1    -0.5
    0     0     1     0     0     1       0      0     0
    0     0     0     1     0     0       1      0     0
    0     0     0     0     1     2       1     -1     0
```

es decir, $s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 1, t_1 = -1, t_2 = 0$ componen una solución, así que el subespacio intersección será

$$S \cap T = \mathbf{R}\{w_1\}$$

por lo tanto, dim $S \cap T = 1$.