96. Sean V y V' $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensiones 3 y 4 respectivamente, y sean $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de V y $B' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de V'. Sea $f : V \longrightarrow V'$ la aplicación lineal que verifica:

$$\begin{aligned} f(e_1 + 2e_2 + 3e_3) &= u_1 + 3u_2 + 5u_3 + 3u_4 \\ f(e_1 + e_3) &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ f(2e_2 + 3e_3) &= 2u_2 + 5u_3 + 3u_4 \end{aligned}$$

1. Calcular la matriz de f respecto de las bases B y B'.
2. Calcular el núcleo de f. ¿Es f inyectiva?
3. Dar una base de la imagen de f. ¿Puede ser f sobreyectiva?

Marino 96

pg. 142

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$\begin{tikzcd} \{e_i\} \arrow[r, "A"] & \{u_j\} \\ \{v_i\} \arrow[u, "P"] \arrow[ur, "C"'] & \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ v_2 &= e_1 + e_3 \\ v_3 &= 2e_2 + 3e_3 \end{aligned}\right\}$$

$$P = \left[v_1 \mid v_2 \mid v_3 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} P = 3 \Rightarrow \{v_i\}$ li.ne $\Rightarrow$ base de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow C = AP \Rightarrow A = CP^{-1}$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \text{ datos} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(P|I) \sim \left[I \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -3 & -1 & 1 \end{matrix}}_{P^{-1}} \right]$$

$\Rightarrow A =$

2º mét. $A = \left[f(e_i)_{\{u_j\}} \right]$.

$f(e_1) + 2f(e_2) + 3f(e_3) = u_1 + \ldots$

$f(e_1) + f(e_3) = u_1 + \ldots$

$2f(e_2) + 3f(e_3) = 2u_2 + \ldots$

$$\underbrace{\left[f(e_1) \;\; f(e_2) \;\; f(e_3) \right]}_{1\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{3\times 3} = \underbrace{\left[u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \;\; u_4 \right]}_{1\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{4\times 3}$$

$$\left[f(e_1) \;\; f(e_2) \;\; f(e_3) \right] = \left[u_1 \; - - \right] \underbrace{C P^{-1}}$$