2 Grupos y anillos

Ejercicio 2.1 .– Sea el conjunto $G = \{a, b, c\}$. Formar la tabla de una ley de composición definida en G para que sea grupo.

Ejercicio 2.2 .– Demostrar que si todos los elementos x de un grupo G verifican $x^2 = e$, entonces, el grupo G es abeliano.

Ejercicio 2.3 .– Demostrar que si en un grupo G, $\forall a, b \in G$ se verifica $(ab)^2 = a^2b^2$, entonces, el grupo G es abeliano.

Ejercicio 2.4 .– Sea $(G, \cdot)$ un grupo y H_1, H_2, H_3 subgrupos de G. Probar que $H_1 \cdot (H_2 \cap H_3) \subset (H_1 \cdot H_2) \cap (H_1 \cdot H_3)$.

Ejercicio 2.5 .– Dados los conjuntos $A = \{2^x \cdot 3^y \,|\, (x, y) \in Z \times Z\}$, $B = \{2u \,|\, u \in Z\}$:

a. comprobar que A y B son grupos con respecto al producto

b. estudiar A/B

c. probar que A/B es isomorfo a Z

Ejercicio 2.6 .– Sea G un grupo y sea f la aplicación de G en sí mismo definida por $f(x) = a^{-1}xa$, donde a es un elemento fijo de G. Demostrar que f es un automorfismo.

Ejercicio 2.7 .– Sea G un grupo y sean $a, b \in G$ tales que $ba = ab^k$. Demostrar que se verifican las siguientes igualdades:

a. $b^i a = ab^{ik}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

b. $ba^j = a^j b^{k^j}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

c. $b^i a^j = a^j b^{ik^j}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.8 .– En un anillo A no conmutativo, definimos la nueva operación: $x * y = xy - yx$. Demostrar que:

a. la operación $*$ es distributiva con respecto a la adición.

b. la operación $*$ es anticonmutativa, es decir, $x * y = -y * x$

c. se verifican:

(1) $x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y) = 0$

(2) $(y * z) * x - (x * y) * z = (z * x) * y$.

Ejercicio 2.9 .– En el anillo $Z/(6)$, resolver la ecuación:

$$2x + 5y = k$$
$$5x + 3y = 1$$

Ejercicio 2.10 .– Hallar los divisores de cero del anillo $Z/(24)$.

Ejercicio 2.11 .– Probar que $Z/(m)$, si m es primo, tiene estructura de cuerpo conmutativo con respecto a la suma y el producto.

Ejercicio 2.12 .–

a. Si A es un anillo, no necesariamente conmutativo, se define su *grupo de unidades* o *grupo de elementos invertibles* $U(A)$ como

$$U(A) = \{a \in A |\ \exists\, a^{-1} \in A \quad \text{con} \quad aa^{-1} = 1 = a^{-1}a\}$$

Demostrar que $U(A)$ es efectivamente un grupo con la operación de multiplicación en el anillo.

b. Demostrar que si A y B son dos anillos, entonces

$$U(A \times B) = U(A) \times U(B)$$