5 Formas bilineales y cuadráticas.

Ejercicio 5.1 .– Sea V el espacio vectorial de las funciones reales continuas definidas sobre el intervalo $[0,1]$. Si $f,\ g \in V$, definimos:

$$F(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Mediante las propiedades de la integral, comprobar que F es una forma bilineal sobre V.

Ejercicio 5.2 .– Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica tal que

$$f(e_1, 2e_2) = 2 = f(e_1, e_3), \quad f(3e_2, 2e_3) = -6, \quad f(e_1, e_1) = f(e_3, e_3) = 0, \quad f(e_2, e_2) = -1,$$

siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) Hallar la expresión coordenada de f respecto de dicha base.

b) Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$ dada por $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_1 + e_3$ y $u_3 = e_2 + e_3$, hallar la nueva expresión de f respecto de $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Ejercicio 5.3 .– Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - 2x_1y_2.$$

a) Probar que f es bilineal, pero no es simétrica.

b) Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = f((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)).$$

Encontrar, si existe, la expresión de una forma bilineal simétrica, g, sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $Q = Q_g$.

Ejercicio 5.4 .– Sean A y B matrices simétricas $n \times n$. Utilizando que $x^\top(A + B)x = x^\top Ax + x^\top Bx$, demuestra:

a) si A y B son definidas positivas, entonces $A + B$ es definida positiva,

b) si A y B son definidas negativas, entonces $A + B$ es definida negativa,

c) A definida positiva y B semidefinida positiva $\Rightarrow A + B$ definida positiva,

d) A definida negativa y B semidefinida negativa $\Rightarrow A + B$ definida negativa.

Ejercicio 5.5 .– Utilizando matrices diagonales, da ejemplos de los siguientes hechos:

a) A y B indefinidas, pero $A + B$ definida,

b) A y B semidefinas positivas, ninguna definida, pero $A+B$ definida, A indefinida $\iff -A$ indefinida.

c) A y B semidefinas positivas, ninguna definida y $A + B$ semidefinida.

Ejercicio 5.6 .– Sea A simétrica, demuestra:

a) A definida positiva $\iff$ $-A$ definida negativa,

b) A semidefinida positiva $\iff$ $-A$ semidefinida negativa,

c) A indefinida $\iff$ $-A$ indefinida.

Ejercicio 5.7 .– Se considera la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$:

$$q(u) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2,$$

con (x_1, x_2) las coordenadas de u en una base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Calcula la expresión matricial de q:
(a) en la base $\{e_1, e_2\}$,
(b) en la base $\{v_1, v_2\}$, donde $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (1, 2)$ en la primera base.

Ejercicio 5.8 .– Considera las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$:

$$q_1(v) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 4xz, \qquad q_2(v) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz,$$

$$q_3(v) = 9x^2 - 3y^2 + 6xy + 18xz + 12yz, \qquad q_4(v) = xy + 2xz.$$

Escríbelas en forma matricial, encuentra bases conjugadas para cada una de las cuatro matrices obtenidas y clasifica las formas cuadráticas correspondientes.

Ejercicio 5.9 .– Clasifica las siguientes matrices en cuanto a signo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 2+3i \\ 0 & 2-3i & 4 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 0 \\ 1+i & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Encuentra bases conjugadas respecto a todas ellas.

Ejercicio 5.10 .– Dada la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$q(u) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + (\alpha - 1)z^2 + 2xy,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Hallar el rango y la signatura de q para los distintos valores de α. Clasifica, en función de dichos valores, la forma cuadrática.

Ejercicio 5.11 .– Utilizando el criterio de los menores principales, calcula los valores del parámetro μ para los cuales la siguiente matriz es definida positiva:

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.12 .– Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que A es definida positiva y hallar su factorización de Cholesky.

b) Utilizar la factorización anterior para resolver el sistema $AX = b$, donde $b^\top = (2, 1, 0)$.

Ejercicio 5.13 .– Sea A una matriz rectangular cualquiera. Demuestra que $A^\top A$ es una matriz simétrica semidefinida positiva.