6 Espacios con producto escalar

Ejercicio 6.1 .– En el espacio $\mathbb{R}^3$ consideramos la aplicación $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 6x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_3$$

i) Comprobar que $\mathbb{R}^3$ con F es un espacio euclídeo.

ii) ¿Cuál es la matriz de este producto escalar respecto de la base canónica?

Ejercicio 6.2 .– Sea V el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ con el producto escalar estándar:

$$(p(x)|q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

Hallar una base ortogonal de este espacio vectorial euclídeo.

Ejercicio 6.3 .– Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar estándar:

$$x \cdot y = x_1\, y_1 + \ldots + x_n\, y_n$$

siendo $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$. Obtener, para n = 3, una base ortonormal a partir de $\{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

Ejercicio 6.4 .– Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ (con el producto escalar estándar) cuyos primeros vectores sean

$$a_1 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2), a_2 = (1/6, 1/6, 3/6, -5/6)$$

y tal que a_3 tenga su primera componente nula.

Ejercicio 6.5 .– En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar que respecto a una base $\{a_1, a_2, a_3\}$ tiene como matriz coordenada:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Comprobar que, efectivamente, se trata de un producto escalar.

b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio engendrado por los vectores $a_1 + a_2$ y $a_1 - a_2$.

c) Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con respecto a ese producto escalar.

Ejercicio 6.6 .– Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Considerar $A^1, A^2, A^3 \in \mathbb{R}^4$ y aplicar el método de Gram-Schmidt para obtener un sistema ortonormal.

b) Encontrar A = Q R con Q $\in M_3(\mathbb{R})$ talque Q'Q = I, $R \in M_3(\mathbb{R})$ triangular superior.

Ejercicio 6.7 .– Hallar la factorización Q R de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

y utilizarla para resolver el sistema A X = b donde $b^T = (3, 3, -1)$.

Ejercicio 6.8 .– Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar y

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,| x + y + z = 0\}.$$

Hallar el vector de S más próximo al vector (1, -1, 3).

Ejercicio 6.9 .– Sea S el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 2 cuyo término constante sea 0. Si $p(x) = 1 + x + x^2$, hallar $q(x) \in S$ tal que sea mínima la cantidad:

$$\left(\int_0^1 (p(x) - q(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

Nota: Se considera $\mathbb{R}_2[x]$ espacio vectorial euclídeo con el siguiente producto escalar:

$$p(x) \cdot q(x) = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$$

Ejercicio 6.10 .– Sea S el conjunto de los polinomios que son combinación lineal de (x - 1) y $(x - 1)^2$. Si $p(x) = x^2 - 3x + 2$, hallar $q(x) \in S$ tal que sea mínima la cantidad $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$ donde a, b, c son tales que $a + bx + cx^2 = p(x) - q(x)$.
Nota: Se considera el mismo producto escalar que en el ejercicio anterior

Ejercicio 6.11 .– La relación entre los grados Farenheit F y Celsius C es de la forma F = a + b C, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. A causa de unas medidas no exactas, la tabla siguiente no refleja perfectamente esta relación. Hallar valores aproximados de a y b a partir de los siguientes datos:

C	-1	2	10	15
F	32	36	51	57

Hallar la ecuación que mejor ajuste estos datos.

Ejercicio 6.12 .– Ajustar mediante una parábola $y = a + bt + ct^2$ las medidas siguientes:
y = 2 en t = -1; y = 0 en t = 0; y = -3 en t = 1; y = -5 en t = 2.

Ejercicio 6.13 .– Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

obtener la descomposición A = Q R y resolver el sistema A X = b, donde b = (0, 1, - 1)^T , por mínimos cuadrados.

Ejercicio 6.14 .– Sea V el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ con el producto escalar:

$$< p, q >= \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$$

Para cada $p \in V$, sea $f_p : V \longrightarrow V$ dada por $f(q) = pq$. Probar que f_p es simétrico.