3 Espacios vectoriales

Ejercicio 3.1 .– Una central térmica quema dos tipos de carbón: antracita (A) y hulla (B). Por cada tonelada de A quemada, la central produce 27.6 millones de vatios de calor, 3100 gramos (g) de dióxido de azufre y 250 g de residuos en polvo. Por cada tonelada de B quemada, la planta produce 30.2 millones de vatios de calor, 6400 gramos (g) de dióxido de azufre y 360 g de residuos en polvo.

a) ¿Cuánto calor produce la central cuando quema x_1 toneladas de A y x_2 toneladas de B?

b) Supóngase que la salida de la central es descrita por un vector que lista las cantidades de calor, dióxido de azufre y residuos en polvo. Exprese este resultado como una combinación lineal de dos vectores, suponiendo que la central quema x_1 toneladas de A y x_2 toneladas de B.

Ejercicio 3.2 .– ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ son subespacios vectoriales?.

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$$

$$C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + 2x_4 = 7\}$$

Ejercicio 3.3 .– Probar que las expresiones:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - l - m \\ x_2 &= l + m \end{aligned}$$

con $l, m \in \mathbb{R}$, no constituyen las ecuaciones de ningún subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3.4 .– Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y los subespacios

$$U = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}, a = b = c\}$$

$$W = \{(0, x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Demostrar que: $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Ejercicio 3.5 .– Sean los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \{(0, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}, \quad S_2 = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}, \quad S_3 = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\}$$

a) Comprobar que $S_1 + S_2 \neq S_1 \cup S_2$.

b) Comprobar que la suma $S_1 + S_2$ no es directa.

c) Probar que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_3$.

Ejercicio 3.6 .– Probar que $\mathbb{R}^n$ es la suma directa de los siguientes subespacios:

$$U = \{(x_1, ..., x_n) | x_1 + ... + x_n = 0\}, \quad W = \{(x_1, ..., x_n) | x_1 = ... = x_n\}$$

Ejercicio 3.7 .– En $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$, hallar la forma general de los elementos de $\mathbb{R} < A_1, A_2, A_3 >$ con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.8 .– Hallar un sistema generador del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= l + 2m + 3n \\ x_2 &= l - m \\ x_3 &= -l - n \end{aligned}$$

con $l, m, n \in \mathbb{R}$. Estudiar si (5, -1, -1) $\in S$ y (0, 0, -1) $\in S$.

Ejercicio 3.9 .– Sea V el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$. Demostrar que $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = x + x^2$, $p_3(x) = 1 + x^2$ es base de V. Coordenadas respecto de dicha base de $p(x) = 3 + 2x + 5x^2$.

Ejercicio 3.10 .– Demostrar que

$$S = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ x-y & x+y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

es subespacio de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$. Dar una base de S.

Ejercicio 3.11 .– Hallar las coordenadas de $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ en la siguiente base de $\mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.12 .– En $\mathbb{R}^4$, hallar un suplementario de

$$S = \{(x, y, z, t)/x + y + z + t = 0, x - y + z - t = 0\}$$

Ejercicio 3.13 .– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios:

$$S = \{(x_1, ..., x_4) \mid x_1 - x_2 = 0,\ x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, T =< (1, 1, 2, 1), (2, 0, -1, 1) > .$$

Hallar bases y dimensiones de $S, T, S + T$ y $S \cap T$.

Ejercicio 3.14 .– Sea $T = \{p(x) \in Q_3[x] | \, p(1) = p(2)\}$. Probar que T es un subespacio de $Q_3[x]$. Hallar una base de T y otra de un subespacio suplementario de T respecto de $Q_3[x]$.

Ejercicio 3.15 .– En $\mathbb{R}^3$ determinar, según el valor de $a \in \mathbb{R}$, el rango de los siguientes sistemas de vectores:

a) { (a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a) }

b) { (a, 1, 1), (-1, - a, -1), (-1, -1, a) }

Ejercicio 3.16 .– Sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$, sea $E = \mathbb{R} < \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} >$ con $\bar{a} = \bar{u}_1 + 3\bar{u}_3$, $\bar{b} = 2\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2 + \bar{u}_3$ y $\bar{c} = 4\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2 + 7\bar{u}_3$ y $F = \mathbb{R} < \bar{d}, \bar{e}, \bar{f} >$ con $\bar{d} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3$, $\bar{e} = 2\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 + 4\bar{u}_3$ y $\bar{f} = 3\bar{u}_1 - 4\bar{u}_2 + \bar{u}_3$. Hallar:

a. Una base de E

b. Una base de F

c. $E \cap F$, $\dim(E \cap F)$ y una base de $E \cap F$

Ejercicio 3.17 .– Sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas con respecto de B son $(1,0,1), (2,-1,3), (1,6,2)$, respectivamente.

a. Demostrar que $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ son linealmente independientes.

b. Demostrar que $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ constituyen un sistema generador de $\mathbb{R}^3$

c. Hallar las coordenadas del vector $\bar{v}$ de coordenadas $(1,8,4)$ en la base B con respecto a la base $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.

Ejercicio 3.18 .– Comprobar que las familias siguientes:

$$\{1 + x + 2x^2, \qquad 3 - x, \qquad 2x + x^2\},$$

$$\{-1 + 2x + x^2, \qquad 3 - x^2, \qquad 1 + x + 2x^2\}$$

son bases de $\mathbb{R}_2[x]$. Hallar las coordenadas respecto de la segunda base de los polinomios cuyas coordenadas en la primera base son $(1,2,1), (2,1,2)$.

Realizar el ejercicio de dos formas: a) directamente, b) calculando la matriz de cambio de base y utilizándola para el cambio de coordenadas.

Ejercicio 3.19 .– Sea B = $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, y B' = $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y B" = $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ dos sistemas de vectores tales que:

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1 = u_2 + 3u_4 \\ v_2 = -u_1 + u_2 \\ v_3 = -2u_1 - u_3 + 2u_4 \\ v_4 = -u_1 - u_2 - u_3 + u4 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{c} w_1 = 2u_1 - 2u_2 + u_4 \\ w_2 = u_1 + u_2 + u_3 \\ w_3 = 3u_1 + u_3 - u_4 \\ w_4 = -2u_2 - u_3 + u_4 \end{array} \right.$$

a) Probar que B' y B" son bases de V.

b) Hallar la matriz del cambio de coordenadas de B' a B".

c) Coordenadas en B' del vector v cuyas coordenadas respecto de B" son (2, 1, 0, -1).

CUESTIONES

Ejercicio 3.20 .– Sea V un espacio vectorial sobre K, U_1, U_2 dos subespacios que no están contenidos uno en el otro. Demostrar que existe un vector en $U_1 + U_2$ que no pertenece a ninguno de ellos.

Ejercicio 3.21 .– Razonar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones (Por razonar se entenderá citar teoremas o resultados apropiados en el caso verdadero y proporcionar contraejemplos en el caso falso).

a. Si $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, $\forall b \in V$, entonces, la familia $\{a_1 + b, a_2 + b, ..., a_n + b\}$ es una base de V.

b. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo K. Entonces, $V = K < v_1 > \oplus K < v_2 > \oplus ... \oplus K < v_n >$ y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es base de V.

c. Sean S, T, U tres subespacios distintos de un espacio vectorial V. Entonces,

$$\dim V = \dim S + \dim T + \dim U \Longrightarrow V = S \oplus T \oplus U.$$

d. Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, la familia $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ dada por:

$$u_1 = v_1, u_2 = v_1 - v_2, ..., u_n = v_1 - v_2 - ... - v_n,$$

es una base de V.

e. Sea V un espacio vectorial sobre K y $S = K < \{u_1, u_2\} >$ y $T = K < \{v_1, v_2\} >$ dos subespacios de V.

$$S \cap T = \{0_V\} \Longrightarrow \{u_1, u_2, v_1, v_2\} \text{ es libre.}$$

f. Si $u \in K < v, w >$, entonces $\{u, v, w\}$ es ligada.

g. Si $\{u, v, w, x\}$ es ligada, entonces u es igual a una combinación lineal de v, w y x.