4 Aplicaciones lineales. Diagonalización. Forma canónica de Jordan.

Ejercicio 4.1 .– Probar si las siguientes aplicaciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son o no aplicaciones lineales.

$a) f(x,y) = (2x,y)$ $\qquad b) f(x,y) = (x^2,y)$

$c) f(x,y) = (2x+y, x-y)$ $\qquad d) f(x,y) = (0,0)$

$e) f(x,y) = (x,y)$

Ejercicio 4.2 .– Comprobar si son o no lineales las aplicaciones:

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

definidas por:

a) $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d,$ b) $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = |a|$

Ejercicio 4.3 .– Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (3x+2y, -6x-4y),$$

se pide:

a) ¿Cuáles de los siguientes vectores son del núcleo de f? (5,10),(2,3),(1,1)

b) ¿Cuáles de los siguientes vectores pertenecen a Im(f)? (1,-2),(5,0)

Ejercicio 4.4 .– Siendo $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios de grado menor o igual a 2, se considera una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida por:

$$f(1) = 1+x, \quad f(x) = 3-x^2, \quad f(x^2) = 4+2x-3x^2$$

Hallar la imagen de un polinomio cualquiera ax^2+bx+c, y obtener $f(2-2x+3x^2)$.

Ejercicio 4.5 .– Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 0),$$

se pide:

a) Obtener la matriz coordenada de la aplicación en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^2$.

b) Obtener la matriz coordenada en las bases B de $\mathbb{R}^3$ y B' de $\mathbb{R}^2$, siendo:

$$B = \{(2,0,0),(1,2,4),(1,-1,4)\} \qquad B' = \{(3,1),(1,1)\}$$

c) Hallar ker(f)

d) Hallar matricialmente la imagen del vector u, que en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ tiene coordenadas $u = (5,9,-1)$.

Ejercicio 4.6 .– Sea M la matriz coordenada de un endomorfismo sobre $\mathbb{R}^3$,

$$M = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & m+1 \\ 2m+2 & 2m+2 & 2m+2 \\ m+1 & 3m+1 & m+1 \end{pmatrix}$$

Analizar, según los distintos valores de m, la dimensión del núcleo y de la imagen de dicho endomorfismo.

Ejercicio 4.7 .– Sean f, g aplicaciones lineales definidas de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ por:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+2y+3z, 2x-z) \\ g(x,y,z) &= (-x+y, 3x-2z) \end{aligned}$$

Hallar las matrices de las aplicaciones f, g, $f+g$, αf respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$,

Ejercicio 4.8 .– Sea $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(x,y,z,t) = (x-y+z, y+z-t, x+2z-t)$$

a) Calcular la matriz coordenada de g en bases canónicas de ambos espacios.
b) Demostrar que $\ker g$ tiene dimensión 2.
c) Calcular una base de $\ker g$. Llamar a sus elementos a_3, a_4.
d) Dar dos vectores de $\mathbb{R}^4$ (a_1 y a_2) de forma que a_1, a_2, a_3, a_4 sea base de $\mathbb{R}^4$
e) ¿Por qué se puede afirmar que $b_1 = g(a_1)$ y $b_2 = g(a_2)$ constituyen una base de $Im(g)$?
f) Dar un tercer vector b_3 de forma que $\{b_1, b_2, b_3\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$.
g) Sin realizar ningún cálculo adicional, escribir la matriz de g en las bases $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $\{b_1, b_2, b_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
h) Proponer una forma que sirva para todas las aplicaciones lineales, basada en este ejercicio, de dar bases en las cuales la matriz coordenada de una aplicación lineal tenga una forma similar a la obtenida en el apartado anterior.

Ejercicio 4.9 .– Sea una matriz 5×5 cuyo polinomio característico es

$$p(x) = (x-1)(x-3)(x+2)(x^2+1)$$

¿Cuánto vale el determinante de la matriz?

Ejercicio 4.10 .– Considera la siguiente matriz 3×3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en función de dos parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es su polinomio característico?, ¿cuáles son sus valores propios (reales y complejos)?, ¿para qué valores de a y b la matriz es diagonalizable?

Ejercicio 4.11 .– Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son los valores propios de A?. ¿Hay algún valor de α para el cual la matriz es diagonalizable?

Ejercicio 4.12 .– Calcular la forma de Jordan de las siguientes matrices, así como la matriz del cambio de bases para obtener dicha forma de Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.13 .– Sea A una matriz real cuya forma de Jordan es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular el polinomio característico de A.
b) ¿Qué dimensiones tienen los núcleos iterados asociados a los valores propios de A ?

Ejercicio 4.14 .– Sea A una matriz cuyo polinomio característico es $p(x) = (x-2)^4(x+1)^3$ y tal que $\dim S(-1) = 2$ y $\dim S(2) = 1$. a) ¿Cuál es la forma de Jordan de A?
b) Calcular las dimensiones de los distintos núcleos iterados.

Ejercicio 4.15 .– Sea A una matriz real cuyo polinomio característico es

$$p(x) = x^4(x+3)^2$$

a) Deducir las posibles formas de Jordan de A.
b) ¿Cuántos vectores propios independientes hay en cada caso?
c) ¿Qué dimensiones tienen los núcleos iterados en cada caso?

Ejercicio 4.16 .– Sea λ un valor propio de una matriz A, razona si son posibles las siguientes situaciones:
a) $\dim E_1(\lambda) = 1, \quad \dim E_2(\lambda) = 2, \quad \dim E_3(\lambda) = 4,$
b) $\dim E_1(\lambda) = 1, \quad \dim E_2(\lambda) = 1, \quad \dim E_3(\lambda) = 2,$
c) $\dim E_1(\lambda) = 0, \quad \dim E_2(\lambda) = 2, \quad \dim E_3(\lambda) = 4,$
d) $\dim E_1(\lambda) = 1, \quad \dim E_2(\lambda) = 3, \quad \dim E_3(\lambda) = 4.$