Práctica 4

Formas cuadráticas.

Contenido:

Formas sesquilineales y cuadráticas: introducción, diagonalización, clasificación.

4.1 Introducción

Dada una aplicación $f : V \times V \longrightarrow K$ con V espacio vectorial sobre un cuerpo K, se dice *forma sesquilineal* sobre V si cumple:

- $\forall\ u,\ u',\ v \in V, \quad f(u+u',v) = f(u,v) + f(u',v)$
- $\forall\ u,\ v\ \in V,\ \forall\ t \in K, \quad f(tu,v) = tf(u,v)$
- $\forall\ u,\ v,\ v'\ \in V, \quad f(u,v+v') = f(u,v) + f(u,v')$
- $\forall\ u,\ v\ \in V,\ \forall\ t \in K, \quad f(u,tv) = \bar{t}f(u,v)$

donde $\bar{t}$ es el conjugado de t.

Notar que si el cuerpo K es $\mathbb{R}$, la forma sesquilineal es una *forma bilineal*, que será simétrica si $f(u,v) = f(v,u),\ \forall u,v \in V$ y alternada si $f(u,v) = -f(v,u), \quad \forall u,v \in V$.

Si V es un espacio vectorial real y $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal sobre V, se llama *forma cuadrática* asociada a f, a la aplicación $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $q(u) = f(u,\ u), \quad \forall u \in V$.

La expresión coordenada de una forma sesquilineal $f : V \times V \longrightarrow K$ sobre V se calcula de la siguiente manera:

Se considera una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V.

$$\forall u \in V,\ u = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = X'(v_i)$$

$$\forall v \in V,\ v = y_1v_1 + \ldots + y_nv_n = Y'(v_i)$$

$$\begin{aligned}
f(u,v) &= f(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n,\ y_1v_1 + \ldots + y_nv_n) \\
&= x_1f(v_1, y_1v_1 + \ldots + y_nv_n) + \ldots + x_nf(v_n, y_1v_1 + \ldots + y_nv_n) \\
&= x_1[\bar{y_1}f(v_1,v_1) + \ldots + \bar{y_n}f(v_1,v_n)] + \ldots + x_n[\bar{y_1}f(v_n,v_1) + \ldots + \bar{y_n}f(v_n,v_n)] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i\bar{y_j}f(v_i,v_j) = X'A\bar{Y},
\end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(v_n, v_1) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

A se dice *matriz coordenada* de f respecto de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

La expresión obtenida anteriormente:

$$\forall u, v \in V, \quad f(u, v) = X'A\bar{Y},$$

se dice *expresión coordenada* de f respecto de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

4.1.1 Ejemplo práctico

Sea $V = \mathbb{C}^2$ espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y f la aplicación $f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\bar{y_1} + 3x_1\bar{y_2} - x_2\bar{y_1} + 2x_2\bar{y_2}$$

a) Comprobar que es una forma sesquilineal.

b) Calcular su expresión coordenada con respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^2$.

c) Calcular $f(u, v)$ con $u = (1 + i,\, 2i)$ y $v = (0,\, 3 - i)$

Solución con MATLAB

En primer lugar definimos la función:

$>> F = inline('x(1) * conj(y(1)) + 3 * x(1) * conj(y(2)) - x(2) * conj(y(1)) + 2 * x(2) * conj(y(2))', 'x', 'y')$

Ahora comprobamos que es una forma sesquilineal:

$>> syms\ a\ b\ c\ d\ e\ f\ m\ n$

$>> u = [a\ b]$

$>> v = [c\ d]$

$>> up = [e\ f]$

$>> vp = [m\ n]$

$>> simplify(F(u + up,\, v) - F(u,\, v) - F(up,\, v))$

$>> simplify(F(u,\, v + vp) - F(u,\, v) - F(u,\, vp))$

$>> syms\ s\ t$

$>> simplify(F(t * u,\, v) - t * F(u,\, v))$

$>> simplify(F(u,\, s * v) - conj(s) * F(u,\, v))$

Calculamos la expresión coordenada

$>> e1 = [1\ 0]$

$>> e2 = [0\ 1]$

$>> A = [F(e1,\, e1) \quad F(e1,\, e2); F(e2,\, e1) \quad F(e2,\, e2)]$

Calculamos $f(u, v)$ con $u = (1 + i,\, 2i)$ y $v = (0,\, 3 - i)$ de dos formas distintas:

$>> F([1 + i \quad 2 * i], [0 \quad 3 - i])$

$>> [1 + i \quad 2 * i] * A * [0 \quad 3 - i]'$

4.1.2 Ejercicios

1. Sea f la aplicación $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

   $$f((x_1, x_2, x_3),\, (y_1, y_2, y_3)) = x_1\bar{y_1} + ix_1\bar{y_2} + 2ix_1\bar{y_3} + 2ix_2\bar{y_1} - 2x_2\bar{y_2} - 4x_2\bar{y_3} + (1+i)x_3\bar{y_1}$$

   a) Comprobar que es una forma sesquilineal.
   b) Calcular la matriz coordenada de f respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^3$.
   c) Calcular la matriz coordenada de f respecto a la base $\{(i, 1, 1),\ (0, 1, 0),\ (1 + i, 2i, 1)\}$ de $\mathbb{C}^3$.

2. Encontrar la matriz A coordenada respecto de la base estandar de la forma sesquilineal $f : \mathbb{C}_3[x] \times \mathbb{C}_3[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(p(x), q(x)) = p'(0)\bar{q}'(0)$.

   a) ¿Es una forma bilineal simétrica?.
   b) ¿Cuál es su forma cuadrática Q asociada?.
   c) Calcula $Q(1 + (1 - i)x + (2 + i)x^2)$.

3. Dadas las aplicaciones

   a) $f : R^3 \times R^3 \longrightarrow R$ definida por
   $f(u, v) = f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_1$
   b) $f : R^2 \times R^2 \longrightarrow R$ definida por
   $f(u, v) = f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1x_2$
   c) $f : R^3 \times R^3 \longrightarrow R$ definida por
   $f(u, v) = f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_3y_3$

   Comprobar si son bilineales. Calcular su expresión matricial y observar si son simétricas o alternadas.

4.2 Diagonalización y clasificación de formas cuadráticas

Para diagonalizar una matriz hermítica (simétrica en el caso real) asociada a una forma cuadrática puede utilizarse cualquiera de los métodos conocidos: encontrar una base de vectores conjugados, encontrar una base ortonormal de vectores propios, método de diagonalización por congruencia.

El método más habitual utiliza matrices elementales para obtener una matriz diagonal congruente con la matriz coordenada de una forma cuadrática, determinando fácilmente la matriz del cambio a la nueva base. Este método lo denominaremos *método de diagonalización por congruencia*, y consiste en realizar operaciones elementales de congruencia sobre la matriz A coordenada de la forma cuadrática, es decir, efectuar las mismas operaciones elementales sobre las filas y las columnas para llegar a una diagonal congruente.

En la práctica hay que ampliar la matriz A con la matriz unidad y realizar las operaciones elementales de congruencia mencionadas; en el lugar de la matriz unidad quedaran reflejadas las operaciones sobre las filas, es decir, la matriz P que verifica la relación de congruencia:

$$PAP^T = D$$

4.2.1 Ejemplo resuelto

Obtener una matriz diagonal congruente con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y escribir una base conjugada.

Solución con MATLAB de dos formas distintas:

Introducimos la matriz	
$>> A = [1\ 2\ 0; 2\ 3\ 1; 0\ 1\ 1]$	$>> A = [1\ 2\ 0; 2\ 3\ 1; 0\ 1\ 1]$
$>> P = eye(3)$	$>> P = eye(3)$
Operación por filas en A y P	$>> AP = [A, P]$
$>> A = [A(1,:);\ A(2,:) - 2 * A(1,:);\ A(3,:)]$	$>> AP(2,:) = AP(2,:) - 2 * AP(1,:)$
$>> P = [P(1,:);\ P(2,:) - 2 * P(1,:);\ P(3,:)]$	$>> AP(:,2) = AP(:,2) - 2 * AP(:,1)$
La misma operación por columnas en A	$>> AP(3,:) = AP(3,:) + AP(2,:)$
$>> A = [A(:,1)\ A(:,2) - 2 * A(:,1)\ A(:,3)]$	$>> AP(:,3) = AP(:,3) + AP(:,2)$
Operación por filas en A y P	$>> D = AP(:,1:3)$
$>> A = [A(1,:);\ A(2,:);\ A(3,:) + A(2,:)]$	$>> P = AP(:,4:6)$
$>> P = [P(1,:);\ P(2,:);\ P(3,:) + P(2,:)]$	$>> D == P * A * P'$
La misma operación por columnas en A	
$>> A = [A(:,1)\ A(:,2)\ A(:,3) + A(:,2)]$	

Resultado obtenido:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = PAP^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Base conjugada:

$$\{(1,0,0), \quad (-2,1,0), \quad (-2,1,1)\}$$

4.2.2 Ejercicios

1. Para cada una de las matrices

$$a)\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 0 & 1-i \\ 0 & 1+i & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1 \\ 1-i & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz diagonal congruente hermítica (simétrica) con ella.

2. Diagonalizar y clasificar las siguientes formas cuadráticas definidas sobre R^3y R^2, respectivamente:

   a) $q(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$

   b) $q(x, y) = 2xy - y^2$.

   c) $q(x, y) = xy$.

3. Hallar el rango y la signatura de las formas cuadráticas cuyas expresiones son:

   a) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 6x_2^2$

   b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$.

   c) $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

   y clasificarlas.