2. Sistemas de ecuaciones lineales.

Manuel Palacios
Departamento de Matemática Aplicada
Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza

Otoño 2002

Contents

References

[1] Burgos, J. de: Algebra lineal. *McGraw-Hill*. 1993.

[2] García, J. y López Pellicer, M.: Algebra lineal y Geometría. *Marfil*, 1980.

[3] Griffel, D. H.: Linear Algebra and its applications. *Ellis Horwood*, 1989.

[4] Gutiérrez Gómez, A. y García Castro, F.: Algebra lineal 2. *Pirámide*.

[5] Hernández, E.: Algebra y Geometría. *Addison-Wesley Iberoamericana*, 1994

[6] Merino, L. y Santos, E.: Algebra lineal con métodos elementales. *Ed. Los autores*, Universidad de Granada. 1997.

[7] Strang, G..: Linear Algebra and its Applications. 3^{th} ed. *Hardcourt Brace Jovanovich, Inc.*, 1988.

1 Introducción

El problema que se pretende resolver en este capítulo es el de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas definido en forma matricial mediante:

$$A\,x = b,$$

en donde $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ son datos y $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector incógnita. Explícitamente se puede escribir en la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

En primer lugar hay que *estudiar* el sistema para ver si tiene solución, en segundo, hay que *encontrar* esa solución. Recordemos un resultado de bachillerato

Teorema 1.1 *(Rouché-Fröbenius) Un sistema de ecuaciones lineales, tal como el (1), es*
compatible $\Longleftrightarrow$ *rang* A = *rang* $[A\ \ b]$
compatible determinado $\Longleftrightarrow$ *rang* A = *rang* $[A\ \ b] = n$
compatible indeterminado $\Longleftrightarrow$ *rang* A = *rang* $[A\ \ b] < n$
incompatible $\Longleftrightarrow$ *rang* $A \neq$ *rang* $[A\ \ b]$

Los procedimientos de resolución de un sistema lineal consisten básicamente en transformar el sistema Ax = b en otro equivalente, es decir, que tenga las mismas soluciones, pero que sea más fácil de resolver, por ejemplo, que tenga forma triangular. Una vez en esta forma, es fácil estudiar el sistema y, en su caso, encontrar su solución por sustitución hacia atrás.

Para ello, suelen utilizarse diferentes métodos basados en el clásico método de eliminación gaussiana, que consiste, como ya es conocido, en ir haciendo ceros por debajo de la diagonal en cada columna de la matriz ampliada.

2 Operaciones elementales

Para simplificar el sistema lineal (reducirlo a uno triangular) se pueden realizar las siguientes operaciones elementales con las ecuaciones:
a) intercambio de la i-ésima y la j-ésima,
b) substitución de la i-ésima por ella más la j-ésima multiplicada por un escalar λ,
c) multiplicación de la j-ésima ecuación por un escalar $\lambda \neq 0$.

Estas operaciones elementales son las operaciones aritméticas más sencillas que transforman un sistema lineal en otro equivalente, es decir, con las mismas soluciones.

Los tres tipos de operaciones elementales se pueden realizar sobre el sistema mediante multiplicación por unas matrices adecuadas, llamadas *matrices elementales*

Definición 2.1 *Las matrices elementales que permiten realizar las operaciones mencionadas están definidas en la forma siguiente:*
a) P_{ij} *es la matriz unidad con sus filas* i *y* j *cambiadas;*
b) $P_{ij}(\lambda)$ *es la matriz unidad, pero con su elemento* ij *es igual a* λ*;*
c) $P_{jj}(\lambda)$, $\lambda \neq 0$, *es la matriz unidad, pero con su elemento* jj *igual a* λ.

Por ejemplo, si tomamos matrices de orden 3:

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{23}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{22}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que al multiplicar una matriz A a la izquierda por alguna de estas matrices, se realiza la operación indicada. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

$$P_{23}\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix},$$

$$P_{23}(\lambda)\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + \lambda\, a_{31} & a_{22} + \lambda\, a_{32} & a_{23} + \lambda\, a_{33} & a_{24} + \lambda\, a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

$$A\, P_{22}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \lambda\, a_{21} & \lambda\, a_{22} & \lambda\, a_{23} & \lambda\, a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Observemos que al realizar las mismas multiplicaciones anteriores por la derecha, se realizan las operaciones elementales sobre las columnas de la matriz A. En concreto:

$$A\, P_{23} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{34} \end{bmatrix},$$

$$A\, P_{23}(\lambda) = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda\, a_{12} + a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & \lambda\, a_{22} + a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda\, a_{32} + a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

$$A\, P_{22}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a_{11} & \lambda\, a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \lambda\, a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & \lambda\, a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Observemos el diferente comportamiento de las matrices $P_{ij}(\lambda)$ al actuar sobre las filas o sobre las columnas, y cómo el tamaño de las matrices elementales debe ser elegido adecuadamente.

Propiedad 2.2 *Todas las matrices elementales son regulares y sus inversas son las siguientes:*

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}, \quad (P_{ij}(\lambda))^{-1} = P_{ij}(-\lambda), \quad (P_{jj}(\lambda))^{-1} = P_{jj}(1/\lambda).$$

Propiedad 2.3 *El determinante de las matrices elementales viene dado por:*

$$\det(P_{ij}) = -1, \quad \det(P_{ij}(\lambda)) = 1, \quad \det(P_{jj}(\lambda)) = \lambda.$$

3 El método de eliminación gaussiana

Como hemos comentado más arriba, el método de eliminación gaussiana consiste básicamente en transformar el sistema en otro equivalente, cuya matriz de coeficientes tenga forma escalonada, mediante premultiplicación por matrices elementales adecuadas. Recordémoslo con el siguiente ejemplo realizado con Matlab.

Ejemplo 3.1

```
a =
      0           -5            4            2
      0            3           -4            4
      5            3           -5            1
b= [4;-3;-1]

u=[a,b];m=eye(3);
Primer paso, permutar filas 1 y 3
i=3;j=1;t=0;e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
      5            3           -5            1           -1
      0            3           -4            4           -3
      0           -5            4            2            4
Segundo paso, hacer ceros en la segunda columna por debajo de la diagonal
i=3;j=2;t=-u(i,j)/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
      5            3           -5            1           -1
      0            3           -4            4           -3
      0            0         -8/3         26/3           -1
En este momento se analiza el sistema y se comprueba que es compatible
indeterminado.
Tercer paso, anular los elementos de encima de la diagonal comenzando
por la columna correspondiente al último pivote (esto es lo que se denomina
substitución hacia atrás)
 i=2;j=3;t=-u(i,j)/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
      5            3           -5            1           -1
      0            3            0           -9         -3/2
      0            0         -8/3         26/3           -1

i=1;j=3;t=-u(i,j)/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
      5            3            0        -61/4          7/8
      0            3            0           -9         -3/2
      0            0         -8/3         26/3           -1

i=1;j=2;t=-u(i,j)/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
      5            0            0        -25/4         19/8
      0            3            0           -9         -3/2
      0            0         -8/3         26/3           -1
Cuarto paso, hacer unos los elementos que han figurado como pivotes.
i=1;j=1;t=1/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
      1            0            *         -5/4        19/40
      0            3            *           -9         -3/2
      0            0         -8/3         26/3           -1

i=2;j=2;t=1/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
      1            0            *         -5/4        19/40
      0            1            *           -3         -1/2
      0            0         -8/3         26/3           -1

i=3;j=3;t=1/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
      1            0            *         -5/4        19/40
      0            1            *           -3         -1/2
      0            0            1        -13/4          3/8

Paso final, despejar las
incógnitas en función de un parámetro, que es la cuarta incógnita, para obtener las
infinitas soluciones del sistema en la forma
```

$$x_1 = \frac{19}{40} + \frac{5}{4}\,\alpha, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + 3\,\alpha, \quad x_3 = \frac{3}{8} + \frac{13}{4}\,\alpha, \quad x_4 = \alpha$$

El proceso seguido, completo hasta la obtención de las soluciones, suele denominarse **método de Gauss-Jordan** y la forma escalonada especial, U, en que se ha transformada la matriz ampliada del sistema se llama **forma escalonada reducida por filas** (comando rref(A) de Matlab).

3.1 Cálculo del rango de una matriz

Observemos que cuando se ha obtenido la forma escalonada (después del segundo paso en el ejemplo) se puede deducir el **rango** de la matriz A del sistema y de la matriz ampliada.

Definición 3.2 *El rango de la matriz es igual al número de filas no nulas de la matriz triangular resultante después de haber completado la eliminación gaussiana.*

En consecuencia, llegados a este paso se puede discutir un sistema. Si ambos rangos coinciden, el sistema es compatible y se sigue el proceso, caso contrario, el sistema es incompatible.

En el ejemplo anterior se observa que el rango de A, rg A, es 3 y coincide con el de la ampliada, aunque es menor que el número de incógnitas, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado; aparecerán tantos parámetros en la solución como el número de incógnitas menos el rango de A.

3.2 Cálculo del determinante de una matriz cuadrada

El proceso de eliminación gaussiana también permite calcular el determinante de una matriz cuadrada. Para ello se efectúa la eliminación gaussiana, sin multiplicar las filas por ningún escalar, hasta llegar a la matriz equivalente triangular superior. Este proceso se puede representar en la forma:

$$E_r \cdots E_1 \, A = U$$

en donde las matrices E_j son matrices elementales de permutación o de sustitución, por lo que su determinante (cf. prop.2.3) vale

$$\det(P_{ij}) = -1, \quad \det(P_{ij}(\lambda)) = 1$$

y, por lo tanto,

$$\det(E_r \cdots E_1 \, A) = \det(E_r) \cdots \det(E_1) \, \det(A) = (-1)^\epsilon \, \det(A) = \det(U) \quad \Longrightarrow$$

$$\det(A) = (-1)^\epsilon \, \det(U) = (-1)^\epsilon \prod_{j=1}^{n} u_{jj},$$

siendo ϵ el número de permutaciones de filas realizado.

Por ejemplo, si consideramos solo las tres primeras columnas de la matriz A del ejemplo 3.1, podemos decir que

$$\det A = 5.3.(-8/3) = -40$$

Evidentemente, si alguno de los elementos de la diagonal de la matriz U es cero, el determinante de A es cero también.

3.3 Cálculo de la inversa de una matriz regular

Dada una matriz regular $A \in M_K(n)$, el cálculo de su inversa se reduce a resolver el sistema definido por

$$A \, X = I,$$

en donde X = A^{-1} es la matriz inversa. En realidad, este problema se puede interpretar como la resolución de n sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes y términos independientes coincidentes con las columnas de la matriz unidad, I.

Así, pues, el cálculo de la matriz inversa se puede llevar a cabo aplicando el método de Gauss-Jordan a la matriz A ampliada con las columnas de la matriz unidad, de esta forma en el lugar que ocupaba inicialmente la matriz unidad aparecerá ahora la inversa de A.

Ejercicio 3.3 *Encontrar la inversa de*

```
a =
    -2           0           0
     3           0          -1
    -2          -4          -2
```

Sol.: Utilizando Matlab

```
ai = [a,eye(3)]
    -2           0           0           1           0           0
     3           0          -1           0           1           0
    -2          -4          -2           0           0           1

u=ai;m=eye(3);
i=2;j=1;t=-u(i,j)/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
    -2           0           0           1           0           0
     0           0          -1          3/2          1           0
    -2          -4          -2           0           0           1
i=3;j=1;t=-u(i,j)/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
    -2           0           0           1           0           0
     0           0          -1          3/2          1           0
     0          -4          -2          -1           0           1

i=3;j=2;t=0;e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
    -2           0           0           1           0           0
     0          -4          -2          -1           0           1
     0           0          -1          3/2          1           0

i=2;j=3;t=-u(i,j)/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
    -2           0           0           1           0           0
     0          -4           0          -4          -2           1
     0           0          -1          3/2          1           0

i=3;j=3;t=-1/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
    -2           0           0           1           0           0
     0          -4           0          -4          -2           1
     0           0          -1          3/2          1           0

i=3;j=3;t=1/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
    -2           0           0           1           0           0
     0          -4           0          -4          -2           1
     0           0           1         -3/2         -1           0

i=2;j=2;t=1/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
    -2           0           0           1           0           0
     0           1           0           1          1/2        -1/4
     0           0           1         -3/2         -1           0

i=1;j=1;t=1/u(j,j);e=pij(i,j,t,3);m=e*m;u=e*u
     1           0           0         -1/2          0           0
     0           1           0           1          1/2        -1/4
     0           0           1         -3/2         -1           0

inv(a) =
   -1/2          0           0
     1          1/2        -1/4
   -3/2         -1           0

inv(a) == m
     1           1           1
     1           1           1
     1           1           1
```

Podría haberse utilizado la orden “rref(A)” de Matlab para obtener el mismo resultado.

Observemos también que el conjunto de operaciones elementales realizado se escribe en la forma

$$E_r \cdots E_1 \, A = M \, A = I$$

en donde las matrices E_j son las matrices elementales que han actuado. Por lo tanto, M debe ser la inversa de A.

4 Factorización L U

El método de eliminación gaussiana permite construir matrices L y U únicas tales que: $A = L\,U$, en concreto,

Teorema 4.1 *Sea $A \in M_K(n, m)$ tal que todos sus menores principales son no nulos. Entonces, existen matrices L y U únicas tales que:*

$$A = L\,U, \tag{2}$$

siendo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \cdots & u_{1m} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} & \cdots & u_{2m} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & u_{nn} & \cdots & u_{nm} \end{pmatrix} \tag{3}$$

La fórmula (2) se denomina factorización L U *de la matriz A.*

Observemos que, según 3.2, los menores principales son

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ & \cdots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1k} \\ & \ddots & \\ & & u_{kk} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{k} u_{jj}$$

Por lo tanto, la no anulación de estos menores principales equivale a la no anulación de los privotes de la elminación gaussiana. Si algún pivote resultase nulo, bastaría realizar una permutación adecuada con alguna fila posterior para conseguir la hipótesis del enunciado.

Demostr.: El primer paso de la eliminación consiste en la multiplicación de la matriz A por las matrices elementales $P_{i1}(-l_{i1})$, $\quad l_{i1} = -a_{i1}/a_{11}$, $\quad i = 2, 3, \dots, n$, es decir, realizando dicho producto por la matriz

$$L_1 = P_{n1}(-l_{n1}) ... P_{21}(-l_{21}), \tag{4}$$

Analogamente, el paso k-ésimo consiste en la multiplicación de la matriz A de este paso por las matrices elementales $P_{ik}(-l_{2k}), i = k+1, , \dots, n$, es decir, realizando dicho producto por la matriz

$$L_k = P_{nk}(-l_{nk}) ... P_{k+1,k}(-l_{k+1,k}), \tag{5}$$

Por lo tanto, las sucesivas matrices $A^{(k)}$ son:

$$L_1 \, A = A^{(1)}, \quad L_2 \, A^{(1)} = A^{(2)}, \quad L_{n-1} \, A^{(n-1)} = A^{(n)} = U$$

En consecuencia,

$$U = L_{n-1} \, L_{n-2} \, ... L_1 \, A \Longrightarrow A = (L_{n-1} \, L_{n-2} \, ... L_1)^{-1} \, U$$

Pero

$$(L_{n-1}\,L_{n-2}\,...L_1)^{-1} = (P_{n,n-1}(-l_{n,n-1})...P_{n1}(-l_{n1})...P_{21}(-l_{21}))^{-1} =$$
$$P_{21}(-l_{21})^{-1}...P_{n1}(-l_{n1})^{-1}...P_{n,n-1}(-l_{n,n-1})^{-1} = P_{21}(l_{21})...P_{n1}(l_{n1})...P_{n,n-1}(l_{n,n-1}) = L.$$

La unicidad de la factorización anterior se prueba como sigue. Supongamos que hubiese dos factorizaciones del tipo mencionado:

$$A = L\,U = \tilde{L}\,\tilde{U}$$

Entonces, ya que $\tilde{L}$ es regular, se tendría: $\tilde{L}^{-1}\,L\,U = \tilde{U}$; como U y $\tilde{U}$ son triangulares superiores y $\tilde{L}$ y L son triangulares inferiores, $\tilde{L}^{-1}\,L$ deber ser la unidad, es decir, $\tilde{L} = L$, y, en consecuencia, $\tilde{U} = U$. ■

Resolución de sistemas lineales.

En la práctica, muchas veces se encuentra que es preciso resolver una serie de sistemas lineales que tienen todos la misma matriz de coeficientes y en los que los términos independientes sólo se conocen después de haber resuelto el sistema anterior. Por eso, para su resolución se suele proceder en la forma siguiente:

a) obtención de la factorización $A = L\,U$

b) resolución de los sistemas triangulares

$$L\,Z = b, \quad U\,X = Z$$

por sustitución progresiva y regresiva, respectivamente.

Ejercicio 4.2 *Resolver el siguiente sistema*

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

mediante factorización $L\ U$ de la matriz de coeficientes

Soluc.: Mediante eleminación gaussiana se consigue $A = L\,U$, siendo

```
L =
      1            0            0
      1            1            0
      -4/5         -9/20        1
U =
      5            2            1
      0            -8           1
      0            0            9/4
```

y de aquí:

$$z_1 = 12, \quad z_2 = -13, \quad z_3 = 27/4,$$

y también,

$$z = 3, \quad y = 2, \quad x = 1,$$