1. Matrices.

Manuel Palacios
Departamento de Matemática Aplicada
Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza

Contents

References

[1] Burgos, J. de: Algebra lineal. *McGraw-Hill.* 1993.

[2] García, J. y López Pellicer, M.: Algebra lineal y Geometría. *Marfil*, 1980.

[3] Griffel, D. H.: Linear Algebra and its applications. *Ellis Horwood*, 1989.

[4] Gutiérrez Gómez, A. y García Castro, F.: Algebra lineal 2. *Pirámide.*

[5] Hernández, E.: Algebra y Geometría. *Addison-Wesley Iberoamericana*, 1994

[6] Merino, L. y Santos, E.: Algebra lineal con métodos elementales. *Ed. Los autores*, Universidad de Granada. 1997.

[7] Strang, G..: Linear Algebra and its Applications. 3^{th} ed. *Hardcourt Brace Jovanovich, Inc.*, 1988.

1 Introducción y definiciones

Los comienzos de las matrices y determinantes se remonta al siglo segundo BC, incluso antes. Pero no es hasta el siglo XVII cuando las ideas reaparecen y se formulan adecuadamente. Eminentes matemáticos de este tiempo, como Leibnitz, MacLaurin, Cramer, etc. trabajaron en este campo. La primera definición abstracta del concepto de matriz se debe a Cayley (1841).

En todo este capítulo supondremos que K es cuerpo conmutativo, aunque este concepto se puede definir sobre un conjunto C cualquiera, por ejemplo, polinomios.

Definición 1.1 *Sean* $I_m = \{1, 2, ..., m\}$ *,* $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ *dos conjuntos finitos de índices. Se denomina matriz de tipo m x n sobre K a toda aplicación*

$$A : I_m \times I_n \longrightarrow K$$

$$(i, j) \longrightarrow a_{ij}$$

Habitualmente, identificaremos la matriz con el conjunto imagen y la representaremos como un cuadro en la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Veamos a continuación algunas definiciones de conceptos relacionados con las matrices.

El subíndice i suele denominarse **índice de filas** y el subíndice j índice de columnas.

Fijado el índice de filas i, la familia $\{a_{ij} | j = 1, 2, ..., n\}$ se llama **fila i-ésima** de la matriz A y la denotaremos por A_i. Análogamente, fijado el índice de columnas j, la familia $\{a_{ij} | i = 1, 2, ..., m\}$ se llama **columna j-ésima** y la denotaremos por A^j.

Si una matriz es del tipo 1 x n se le dirá **matriz fila**; si es del tipo m x 1 se le dirá **matriz columna**.

El conjunto $\{a_{ij} | j = 1, 2, ..., min(m, n)\}$ se llama **diagonal principal** de la matriz A.

Llamaremos **submatriz** o **bloque** de una matriz A a cualquier matriz obtenida suprimiendo alguna o algunas filas o columnas de A.

Llamaremos **matriz diagonal** a toda matriz cuyos elementos no pertenecientes a la diagonal principal sean nulos.

Llamaremos **traspuesta** de una matriz A de tipo $m \times n$ y la denotaremos por A^T a una matriz de tipo $n \times m$ cuyos elementos están definidos por $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Evidentemente, para obtener la traspuesta de una matriz será suficiente cambiar ordenadamente las filas por las columnas de la misma.

Si m $\neq$ n, diremos que A es una **matriz rectangular**; el conjunto de matrices rectangulares de tipo $m \times n$ será denotado por $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ ó $\mathcal{M}_K(m, n)$ ó $K^{m\times n}$.

Si m = n, diremos que A es una **matriz cuadrada**; el conjunto de matrices cuadradas de tipo $n \times n$ será denotado por $\mathcal{M}_n(K)$ ó $\mathcal{M}_K(n)$.

2 Algebra matricial.

Veremos en este párrafo el álgebra matricial, es decir, las operaciones que usualmente se definen en los distintos conjuntos de matrices.

Definición 2.1 *Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ dos matrices cualesquiera de $\mathcal{M}_K(m, n)$, llamaremos suma de A y B, A + B, a la matriz de $\mathcal{M}_K(m, n)$ cuyo elemento genérico (i,j) está definido por $c_{ij} = ai_j + b_{ij}$, es decir,*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Notemos que esta operación está definida exclusivamente entre matrices del mismo tipo, y es una ley de composición interna, es decir, el resultado pertenece al mismo conjunto de matrices.

Definición 2.2 *Dada la matriz $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_K(m, n)$ y $t \in K$ llamaremos matriz producto del escalar t por la matriz A, tA, a la matriz cuyo elemento (i,j) está definido por $t\, a_{ij}$, es decir,*

$$tA = (ta_{ij})$$

Observemos que la matriz t A se obtiene multiplicando cada uno de los elementos de la matriz A por el escalar t.

Observemos que en el conjunto $\mathcal{M}_K(m, n)$, con respecto de la suma de matrices y el producto por escalares, se cumplen las siguientes **propiedades básicas**:

1) Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C
2) Hay un elemento, la matriz nula, 0, que cumple: A + 0 = A = 0 + A
3) Para cada A de $\mathcal{M}_K(m, n)$, hay otra B (= - A), que cumple: A + B = 0 = B + A
4) Conmutativa: A + B = B + A
5) Distributiva 1: t (A + B) = t A + t B
6) Distributiva 2: (t + s) A = t A + s A
7) Pseudoasociativa: t (s A) = (t s) A
8) 1_k A = A

Ejercicio 2.3 *Probar las propiedades anteriores.*

Definición 2.4 *Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_K(m, n)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_K(n, p)$ denominaremos producto de las matrices A y B, y escribiremos $A \cdot B$, a otra matriz $C \in \mathcal{M}_K(m, p)$ cuyo elemento genérico c_{ij} está definido por*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Observemos que el producto de matrices está definido solamente cuando el número de columnas del primer factor coincide con el número de filas del segundo factor. El producto no es una operación interna en $\mathcal{M}_K(m, n)$, incluso puede no estar definido para todos sus elementos; caso de estarlo, el producto no es, en general, conmutativo, ya que, por ejemplo,

$$A\,B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B\,A$$

En el caso de que el producto de tres matrices esté definido, las **propiedades básicas** más sobresalientes son las siguientes:

1) asociativa: A (B C) = (A B) C
2_1) distributiva a la derecha respecto de la suma: A (B+C) = AB + AC

2_2) distributiva a la izquierda respecto de la suma: (A+B) C = A B + AC

Observemos también que, por ejemplo, el producto siguiente

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es nulo sin serlo ninguno de los factores, esto significa que este conjunto posee *divisores de cero.*

Definición 2.5 *Una matriz* $A \in \mathcal{M}_K(n)$ *se dice regular o inversible si existe* $A^{-1} \in \mathcal{M}_K(n)$ *tal que* $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n$*, siendo* I_n *la matriz unidad de orden n.*

Propiedad 2.6 *El conjunto de matrices regulares de* $\mathcal{M}_K(n)$*, que se denomina* $GL(n)$*, verifica las siguientes propiedades básicas con respecto de la multiplicación:*

0) La operación producto es interna en $\mathcal{M}_K(n)$*, es decir, la inversa del producto de dos matrices regulares es otra matriz regular.*

1) Propiedad asociativa: A (B C) = (A B) C

2) Existe una matriz I, la matriz unidad, tal que $A\,I = A = I\,A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_K(n)$

3) Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_K(n)$*, existe otra* $A^{-1} \in \mathcal{M}_K(n)$ *tal que* $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n$

Definición 2.7 *Diremos que una matriz* $A \in \mathcal{M}_K(n)$ *es simétrica si coincide con su traspuesta, es decir, si* $A = A^T$*.*

Definición 2.8 *Diremos que una matriz A es hemisimétrica (o antisimétrica) si verifica que* $A = -A^T$*.*

Consecuencia inmediata de ambas definiciones es que toda matriz simétrica o hemisimétrica debe ser cuadrada; además, si es hemisimétrica, los elementos de su diagonal son nulos.

Ejercicio 2.9 *Probar las siguientes propiedades de la trasposición de matrices:*

$$\begin{aligned} (A+B)^T &= A^T + B^T \\ (t\,A)^T &= t(A^T) \\ (AB)^T &= B^T\,A^T \\ (A^T)^T &= A \end{aligned}$$

Ejercicio 2.10 *Probar que toda matriz cuadrada A puede ponerse de modo único como suma de una matriz simétrica y otra hemisimétrica (el cuerpo ha de ser de car* $K \neq 2$*).*

Ejercicio 2.11 *Se denomina matriz escalar a toda matriz cuadrada M que verifique* $M\,A = A\,M$*,* $\forall A \in \mathcal{M}_K(m,n)$*. Probar que M es una matriz escalar si y solo si es de la forma* $t\,I_n$*, siendo* I_n *la matriz unidad y* $t \in K$*.*

3 Matrices por bloques.

La manipulación de matrices con gran número de filas y de columnas conlleva grandes problemas, incluso cuando se manejan con ordenador. Por eso, suele ser interesante saber descomponer un problema que usa grandes matrices en otros problemas más pequeños, es decir, que utilizan matrices más pequeñas.

La posibilidad de descomponer una matriz en matrices más pequeñas tiene muchas aplicaciones en comunicaciones, electrónica, resolución de sistemas de ecuaciones, aprovechamiento de la estructura vectorial de algunos ordenadores, etc. (consultar el libro de Griffel [3]). Y, sobre todo, da la posibilidad de escribir una matriz en forma más compacta.

Definición 3.1 *Diremos que una matriz A está descompuesta o particionada propiamente en bloques si se puede organizar como una matriz de bloques o submatrices en la forma:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ & & \cdots & \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pr} \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, los bloques se obtienen trazando imaginariamente rectas verticales y horizontales entre los elementos de la matriz A. Los bloques o submatrices se designarán en la forma A_{ij}.

Observar que el número de filas en el bloque A_{ij} depende solo de j, siendo el mismo para todos los i; en modo similar para las columnas.

Ejemplo 3.2 *La matriz A siguiente*

$$A = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}.$$

está descompuesta propiamente en bloques y tiene dos filas y tres columnas de bloques, es decir, es una matriz 2×3 por bloques.

Definición 3.3 *Se define la suma de dos matrices descompuestas en bloques como la matriz por bloques que tiene en la posición (i,j) la suma de los bloques que ocupan esa posición, es decir,*

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Para que la suma por bloques pueda realizarse, las dos matrices deben ser del mismo tamaño y han de estar descompuestas en el mismo número de bloques fila y columna y los bloques que ocupan la misma posición han de ser a su vez del mismo tamaño.

La multiplicación de matrices por bloques se realiza, formalmente, igual que si fuera por elementos.

Definición 3.4 *Se define el producto de dos matrices A y B descompuestas en bloques como la matriz por bloques C que tiene en la posición (i,j) el bloque*

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}\, B_{kj}$$

Para que el producto por bloques pueda realizarse, las dos matrices A y C deben estar descompuestas en bloques de forma conforme, es decir, el número de bloques columna de la matriz A debe ser igual que el de bloques fila de la matriz B, y los bloques involucrados en la suma anterior han de ser de tamaño adecuado para que se puedan multiplicar por elementos.

Ejemplo 3.5

$$A = \left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{array}\right],$$

$$A\,B = \left[\begin{array}{c|cc} 55 & 70 & 85 \\ 70 & 90 & 110 \\ 85 & 110 & 135 \\ \hline 100 & 130 & 160 \end{array}\right].$$

La ventaja de esta forma de proceder es que para obtener cada bloque del producto solo se manipulan matrices más pequeñas.

La idea de las matrices por bloques conduce a entender una matriz A p $\times$ q como un conjunto de q columnas cada una de las cuales es un vector de p componentes; o bien, un conjunto de p filas, cada una de las cuales es un vector de q componentes,

$$A\,B = \left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & v_n \end{array}\right]$$

de manera que

$$(A\,B)_{ij} = a_i\, b_j,$$

es decir, en el lenguaje del algebra elemental, cada elemento del producto es el producto escalar de la fila i-ésima por la columna j-ésima.

Ejercicio 3.6 *Encontrar la transpuesta de la matriz*

$$A = \left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right]$$

Sol.: Basta darse cuenta cómo se construyen los bloques de A y de su transpuesta para obtener:

$$A = \left[\begin{array}{cc} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{31}^T \end{array}\right]$$

Ejercicio 3.7 *Sea*

$$J_2 = \left[\begin{array}{cc} a & 1 \\ 0 & a \end{array}\right], \qquad J_n = \left[\begin{array}{c|c} a & e \\ \hline 0 & J_{n-1} \end{array}\right], \qquad donde\ e = (1\,0 \ldots 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Encontrar J_3^k*, para* $k = 2, 3$*. Encontrar una fórmula general.*

Sol.: Multiplicando por bloques resulta:

$$J_n^2 = \left[\begin{array}{c|c} a^2 & e\,(a + J_{n-1}) \\ \hline 0 & J_{n-1}^2 \end{array}\right],\ J_n^3 = \left[\begin{array}{c|c} a^3 & e\,(a^2 + a\,J_{n-1} + J_{n-1}^2) \\ \hline 0 & J_{n-1}^3 \end{array}\right],$$

$$J_n^k = \left[\begin{array}{c|c} a^k & e\,(a^k + a\,J_{n-1} + \cdots + J_{n-1}^{k-1}) \\ \hline 0 & J_{n-1}^k \end{array}\right],$$

en particular, para n = 3,

$$J_3^2 = \left[\begin{array}{ccc} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 9 & 0 & a^2 \end{array}\right], \quad J_3^3 = \left[\begin{array}{ccc} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{array}\right],$$

Ejercicio 3.8 *Encontrar la inversa de la matriz por bloques*

$$A = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{array}\right]$$

sabiendo que A_{11} y A_{22} son matrices regulares.

Sol.: Escribamos M, matriz inversa de A, por bloques en la forma:

$$M = \left[\begin{array}{cc} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{array}\right]$$

Por definición de inversa, se ha de cumplir:

$$A\,M = I, \qquad \text{es decir,} \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{array}\right]$$

Por lo tanto, se ha de cumplir:

$$\begin{array}{rcl} A_{11}\,M_{11} + A_{12}\,M_{21} & = & I \\ A_{11}\,M_{12} + A_{12}\,M_{22} & = & 0 \\ A_{22}\,M_{21} & = & 0 \\ A_{22}\,M_{22} & = & I \end{array}$$

Como A_{22} es regular, de la tercera se deduce que $\mathcal{M}_{21} = 0$ y de la cuarta, que $\mathcal{M}_{22} = A_{22}^{-1}$. Ahora, de la primera, se deduce que $\mathcal{M}_{11} = A_{11}^{-1}$ y, de la segunda, que $\mathcal{M}_{12} = -A_{11}^{-1}\,A_{12}\,A_{22}^{-1}$

Ejercicio 3.9 *Calcular la inversa de la matriz por bloques*

$$A = \left[\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

Sol.: La inversa A^{-1} existe, ya que los bloques de la diagonal de A son regulares. Aplicando los resultados del ejercicio anterior resulta:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}\,A_{12}\,A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/2 \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

4 Determinante de una matriz cuadrada.

Aunque hay muchas posibilidades de introducir el concepto de determinante de una matriz cuadrada, aquí se hace de forma axiomática, lo que permite una correcta utilización del mismo sin mucho entretenimiento.

En este párrafo se considerán exclusivamente matrices cuadradas sobre un conjunto numérico K.

Definición 4.1 *Dada una matriz cuadrada, A, se denomina* **determinante** *de A, y se denota por* $\det A$, *al valor de la función*

$$\begin{array}{rcl} \det : \mathcal{M}_K(n) & \longrightarrow & K \\ A & \hookrightarrow & \det A \end{array}$$

que cumple los siguientes axiomas:

Si A_j denota las filas de la matriz A;

Axioma 1.- $\det(A_1, ..., \lambda\, A_k, ..., A_n) = \lambda \det A$

Axioma 2.- $\det(A_1, ..., A_k + B, ..., A_n) = \det(A) + \det(A_1, ..., B, ..., A_n)$

Axioma 3.- $\det(A_1, ..., A_n) = 0$, si $A_i = A_j$, con $i \neq j$

Axioma 4.- $\det(I_n) = 1$.

Se puede demostrar que solo existe una función determinante de estas características, así que el $\det A$ es único y pertenece a K.

Propiedad 4.2 $\det(A_1, ..., 0, ..., A_n) = 0$

Propiedad 4.3 $\det(A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n) = -\det(A_1, ..., A_j, ..., A_i, ..., A_n)$

Demostr.: Basta desarrollar $\det(A_1, ..., A_i + A_j, ..., A_i + A_j, ..., A_n) = 0$. ∎

Propiedad 4.4 *Si* $A_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_j$, *entonces,* $\det(A_1, ..., A_i, ..., A_n) = 0$

Demostr.: Sustituyendo, resulta:

$$\det(A_1, ..., A_i, ..., A_n) = \det(A_1, ..., \sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_j, ..., A_n) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \det(A_1, ..., A_j, ..., A_n) = 0$$

Propiedad 4.5

$$\det(A_1, ..., A_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_j, ..., A_n) = \det(A_1, ..., A_i, ..., A_n)$$

Nótese que lo mismo se podría haber dicho cambiando filas por columnas.

Ejemplo 4.6 *Obtención del determinante de una matriz a partir de los axiomas.*

$$\det\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&3\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}1&3&4\\0&6&7\\0&9&3\end{pmatrix}+5\det\begin{pmatrix}0&3&4\\1&6&7\\0&9&3\end{pmatrix}+8\det\begin{pmatrix}0&3&4\\0&6&7\\1&9&3\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}1&3&4\\0&6&7\\0&9&3\end{pmatrix}=3\det\begin{pmatrix}1&1&4\\0&0&7\\0&0&3\end{pmatrix}+6\det\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&7\\0&0&3\end{pmatrix}+9\det\begin{pmatrix}1&0&4\\0&0&7\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&7\\0&0&3\end{pmatrix}=4\det\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+7\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}+3\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=3$$

Y análogamente con los restantes, resultando

$$\det A = 2\,(6\ \cdot 3 - 7\ \cdot 9) - 5\,(3\ \cdot 3 - 4\ \cdot 9) + 8\,(3\ \cdot 7 - 4\ \cdot 6)$$

Estos 6 sumandos corresponden a la conocida **regla de Sarrus** para el desarrollo del determinante de una matriz 3 por 3.

Propiedad 4.7

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\ \cdot \det(B)$$

Demostr.: Puede consultarse en la bibliografía. ■

Propiedad 4.8 *Si la matriz A es regular, se verifica:*

$$1)\ \det(A)\neq 0, \qquad 2)\ \det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$$

Demostr.: A es regular $\Leftrightarrow$ existe A^{-1} tal que $A\cdot A^{-1}=I \Longrightarrow \det(A\cdot A^{-1})=\det(A)\ \det(A^{-1})=1 \Longrightarrow 1)\ \det(A)\neq 0, \qquad 2)\ \det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$ ■

El cálculo del determinate de una matriz A puede obtenerse mediante la conocida fórmula del desarrollo por los elementos de una fila (o una columna), en la forma siguiente:

$$\det A = a_{i1}\det\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{in}\\\dots&\dots&\dots\\1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}+\ldots+a_{in}\det\begin{pmatrix}a_{1}1&\dots&a_{in}\\\dots&\dots&\dots\\0&\dots&1\\\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

aunque muy a menudo se utiliza la eliminación gaussiana.

Propiedad 4.9 *El determinante de una matriz diagonal por bloques verifica:*

$$\det\begin{pmatrix}A11&0\\0&A_{22}\end{pmatrix}=\det A_{11}\cdot\det A_{22}$$

Propiedad 4.10 *El determinante de una matriz triangular por bloques verifica:*

$$\det\begin{pmatrix}A11&A12\\0&A_{22}\end{pmatrix}=\det A_{11}\cdot\det A_{22}$$