Formas bilineales y cuadráticas

Manuel Palacios
Departamento de Matemática Aplicada
Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza

Contenidos

Referencias

[1] Aroca, J. M. y Fernández Bernejo, M. J.: Algebra lineal y geometría. *Universidad de Valladolid*. 1988.

[2] Burgos, J. de: Algebra lineal. *McGraw-Hill*. 1993.

[3] Castellet, M. y Llerena, I: Algebra lineal y geometría. *Reverté*. 1992.

[4] Diego, B. de et al. : Problemas de Algebra lineal (2 ed.). *Deimos*. 1986.

[5] Merino, L y Santos, E.: Algebra lineal con métodos elementales. *Ed. Los autores, Universidad de Granada*. 1997.

[6] Rojo, J.: Algebra lineal. *Vector Ediciones, Madrid*. 1989.

[7] Rojo, J. y Martín, I.: Ejercicios y problemas de Algebra lineal. *Editorial AC, Madrid*. 1989

[8] Strang, G..: Linear Algebra and its Applications. 3^{th} ed. *Hardcourt Brace Jovanovich, Inc.*. 1988.

1. Formas sesquilineales

Sea V un espacio vectorial sobre K, $\quad K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

1.1 *Definiciones y ejemplos*

Definición 1..1 *Se denomina* **forma sesquilineal** *sobre* V *a toda aplicación* $F : V \times V \longrightarrow K$ *que verifique las siguientes condiciones:*

1a) $\forall u_1, u_2, v \in V, \quad F(u_1 + u_2, v) = F(u_1, v) + F(u_2, v)$
1b) $\forall u_1, u_2, v \in V, \quad F(v, u_1 + u_2) = F(v, u_1) + F(v, u_2)$
2a) $\forall u, v \in V, \quad \forall t \in K, \quad F(tv, u) = tF(v, u)$
2b) $\forall u, v \in V, \quad \forall t \in K, \quad F(v, tu) = \overline{t}F(v, u)$

Si $K = \mathbb{R}$, la *forma sesquilineal* sobre V se denomina **forma bilineal** sobre V. En este caso, la propiedad 2b puede ser escrita en la forma
2b') $\forall u, v \in V, \quad \forall t \in K, \quad F(v, tu) = tF(v, u)$

Ejemplo 1..2 *Sea* $V = \mathbb{C}^2$*, espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$*.*

$$F : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longrightarrow x_1\overline{y}_1 + 3x_1\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$$

F es una forma sesquilineal.

En efecto: Veamos, por ejemplo, el 1a) y el 2b).
1a): $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{array}{l} F((x_1, x_2) + (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = F((x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2)) \\ = (x_1 + y_1)\overline{z}_1 + 3(x_1 + y_1)\overline{z}_2 - (x_2 + y_2)\overline{z}_1 + 2(x_2 + y_2)\overline{z}_2 = \\ x_1\overline{z}_1 + 3x_1\overline{z}_2 - x_2\overline{z}_1 + 2x_2\overline{z}_2 + y_1\overline{z}_1 + 3y_1\overline{z}_2 - y_2\overline{z}_1 + 2y_2\overline{z}_2 \\ = F((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + F((y_1, y_2), (z_1, z_2)) \end{array}$$

2b):$\forall t \in K, \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{array}{l} F((x_1, x_2), t(y_1, y_2)) = F((x_1, x_2), (ty_1, ty_2)) = \\ x_1\overline{(ty_1)} + 3x_1\overline{(ty_2)} - x_2\overline{(ty_1)} + 2x_2\overline{(ty_2)} \\ = \overline{t}(x_1\overline{y}_1 + 3x_1\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2) = \overline{t}F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \end{array}$$

Ejemplo 1..3 *En el espacio vectorial* V *de* $\dim_K V = n$ *se considera la base* $\{v_i\}$ *y el conjunto de escalares* $\{\alpha_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \subset K$, $\quad K = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$*. Entonces, la aplicación* $F : V \times V \longrightarrow K$ *definida por*

$$(u, v) \hookrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \overline{y}_j$$

en donde $u = (x_1, ..., x_n), v = (y_1, ..., y_n)$*, es una forma sesquilineal.*

Casos particulares del anterior son los dos siguientes:

Ejemplo 1..4

$$V = \mathbb{C}^n, \qquad F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) \hookrightarrow x_1\overline{y}_1 + ... + x_n\overline{y}_n$$

que resulta al tomar los escalares $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$

Ejemplo 1..5

$$V = \mathbb{R}^n, \qquad F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) \hookrightarrow x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

que resulta al tomar los mismos escalares.

Como se puede comprobar, en el caso $K = \mathbb{R}$ las aplicaciones mencionadas resultan ser formas bilineales.

Consecuencias inmediatas de la definición, cuya demostración es análoga a ya vista en otras ocasiones, son las siguientes:

Consecuencia 1..6 *1.*

$$F(u, 0_V) = 0_K, \quad \forall u \in V$$

2.

$$F(-u, v) = -F(u, v) = F(u, -v), \quad \forall u, v \in V$$

3.

$$F(\sum_i t_i\, u_i, \sum_j s_j\, v_j) = \sum_{i,j} t_i\, s_j\, F(u_i\, v_j), \quad \forall u_i,\ v_j \in V$$

1.2 Expresión coordenada de una forma sesquilineal.

Sea V un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, de dimensión n. Se considera una base $\{v_i\}$ de V. Si X e Y son, respectivamente, las matrices coordenadas de los vectores x e y en dicha base, se puede escribir:

$$x = [v_1 v_2 \dots v_n]\, X = \sum_{i=1}^{n} x^i v_i, \quad y = [v_1 v_2 \dots v_n]\, Y = \sum_{j=1}^{n} y^j v_j$$

y, por lo tanto,

$$F(x, y) = F(\sum_{i=1}^{n} x^i v_i, \sum_{j=1}^{n} y^j v_j) = \sum_{i=1}^{n} x^i F(v_i, \sum_{j=1}^{n} y^j v_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} \overline{y}^j F(v_i, v_j) = (x_1, ..., x_n)^T A(\overline{y}_1, ..., \overline{y}_n) = X^T A \overline{Y}$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} F(v_1, v_1) & F(v_1, v_2) & ... & F(v_1, v_n) \\ F(v_2, v_1) & F(v_2, v_2) & ... & F(v_2, v_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ F(v_n, v_1) & F(v_n, v_2) & ... & F(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Naturalmente, $A \in M_K(n)$

Definición 1..7 *1. La expresión* $F(x, y) = X^T A \overline{Y}, \quad \forall x, y \in V$ *es denominada* **expresión coordenada** *o matricial de la forma sesquilineal* F *respecto de la base* $\{v_i\}$

2. La matriz A *anterior se denomina* **matriz coordenada** *(o asociada) de la forma sesquilineal* F *respecto de la base* $\{v_i\}$

En el caso $K = \mathbb{R}$ y la F bilineal la expresión coordenada se simplifica en la siguiente:

$$\forall x, y \in V, \qquad F(x, y) = X^T A Y$$

Ejemplo 1..8 *La matriz coordenada de la forma sesquilineal*

$$F : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longrightarrow x_1\overline{y}_1 + 3x_1\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$$

considerada anteriormente, respecto de la base canónica de $\mathbb{C}^2$: $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ tiene los siguientes elementos:

$F(e_1, e_1) = 1, F(e_1, e_2) = 3, F(e_2, e_1) = -1, F(e_2, e_2) = 2$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

por lo que la expresión coordenada será:

$$F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 x_2) A \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix}$$

En particular, para los vectores $(1 + i, 2i), (0, 3 - i)$ se tiene:

$$F((1 + i\, 2i), (0, 3 - i)) = (1 + i\, 2i) A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 + i \end{pmatrix} = 2 + 24i$$

En el caso del ejemplo 1.4:

$$F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) \hookrightarrow x_1\overline{y}_1 + ... + x_n\overline{y}_n$$

la matriz coordenada respecto de la base canónica es $A = I_n$

En el caso del ejemplo 1.5:

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) \hookrightarrow x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

la matriz coordenada también resulta ser la matriz unidad y la expresión matricial $F(x, y) = X^T I Y$ se identifica rápidamente con la del producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^3$.

Nota: Sería conveniente recordar algunas propiedades de la transposición y conjugación de matrices de elementos complejos o reales.

Teorema 1..9 *Si $F : V \times V \longrightarrow K$ es una forma sesquilineal sobre V y $F(x, y) = X^T A \overline{Y}$ es su expresión coordenada respecto de una cierta base, entonces, el conjunto de matrices coordenadas de F es*

$$\{B \in M_K(n) \mid \exists P \in GL_K(n) \text{ tal que } B = PAP^*\}$$

siendo $P^* = \overline{P}^T$.

Demostr:

$\Longrightarrow]$ $\forall x, y \in V, \quad F(x, y) = X^T A \overline{Y}$ respecto de la base $\{v_1, ..., v_n\}$.

Considérese otra base $\{w_1, ..., w_n\}$ de V y sea B la matriz coordenada de F respecto de dicha base, la expresión coordenada ahora es: $\forall x, y \in V, \quad F(x, y) = \tilde{X}^T B \overline{\tilde{Y}}$.

Si la relación entre ambas bases está definida en términos matriciales por:

$$[w_1 w_2 \dots w_n] = [v_1 v_2 \dots v_n]\, Q\,, \text{ o bien por: } X = Q\, \tilde{X},$$

en donde los elementos de las columnas de la matriz Q son las coordenadas de los vectores $\{w_j\}$ respecto de la base $\{v_i\}$, sustituyendo se puede obtener:

$$F(x, y) = X^T A \overline{Y} = \tilde{X}^T P A \overline{P}^T \overline{\tilde{Y}}, \quad \text{donde } P = Q^T$$

es decir, la expresión coordenada en la otra base. En consecuencia,

$$B = PAP^* \quad , \qquad P \in GL_K(n)$$

$\Longleftarrow$] Dada la matriz $B = PAP^*$, $P \in GL_K(n)$, es suficiente tomar la nueva base $\{w_1, ..., w_n\}$ definida por $[w_1 \dots w_n] = P^T [v_1 \dots v_n]$ para ver que B es la matriz coordenada de F en dicha base. ■

Definición 1..10 *Dos matrices $A, B \in M_K(n)$ se dicen* **congruentes hermíticas** *si existe una matriz $P \in GL_K(n)$ tal que $B = PAP^*$.*

Algunas observaciones a tener en cuenta:

– La relación binaria definida en $M_K(n)$ mediante $\forall A, B \in M_K(n), \quad A \text{ rel } B \Longleftrightarrow$ A y B son congruentes hermíticas, es una relación de equivalencia.

– El conjunto de matrices coordenadas de una forma sesquilineal sobre V es una de las clases de **congruencia hermítica**.

– En el caso $K = \mathbb{R}$,

$$A \text{ y } B \text{ congruentes hermíticas } \Longrightarrow \exists P \in GL_K(n) \text{ tal que } B = PAP^T,$$

entonces suele hablarse de **congruencia**, simplemente.

– Dos matrices congruentes hermíticas son equivalentes y, por tanto, tienen el mismo rango. Es suficiente observar que P^* es también regular y, en consecuencia, $B = PAP^* \Longrightarrow$ A y B son equivalentes.

Definición 1..11 *Sea $F : V \times V \longrightarrow K$ una forma sesquilineal.*

– *Se denomina* **rango** *de F al rango de una cualquiera de sus matrices coordenadas.*

– *Se dice que F es* **regular***, si $rgF = n = dim_K V$.*

– *Se dice que F es* **singular** *o* **degenerada** *si $rgf < n = dim_K V$*

2. Formas hermíticas. Formas cuadráticas

Seguimos considerando un espacio vectorial V sobre K, $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 2..1 *Se denomina* **forma hermítica** *sobre V a toda forma sesquilineal F sobre V con simétríca hermítica, es decir, tal que*

$$\forall u, v \in V, \quad F(u,v) = \overline{F(v,u)}.$$

Consecuencia 2..2 *1. Si F es hermítica, se verifica:*

$$\forall v \in V, \quad F(v,v) = \overline{F(v,v)} \Rightarrow F(v,v) \in \mathbb{R}$$

2. Si $K = \mathbb{R}$, toda forma hermítica es **bilineal simétrica**, *es decir, es bilineal y, además,*

$$\forall u, v \in V, \quad F(u,v) = F(v,u)$$

Ejemplo 2..3 *La forma sesquilineal siguiente:*

$$F : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \longrightarrow x_1\overline{y}_1 + 3x_1\overline{y}_2 - x_2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$$

no es hermítica

Ejemplo 2..4 *La forma sesquilineal considerada en el ejemplo 1.3 es hermítica si imponemos que $\alpha_{j\,i} = \overline{\alpha_{i\,j}}$*

Ejemplo 2..5 *La forma sesquilineal*

$$F : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que

$$F(x,y) = F((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1\overline{y}_1 + (1+i)\,x_1\overline{y}_2 + (1-i)x_2\overline{y}_1$$

es una forma hermítica.

En efecto:

$$F(y,x) = 2y_1\overline{x}_1 + (1+i)\,y_1\overline{x}_2 + (1-i)y_2\overline{x}_1$$

Por lo tanto,

$$\overline{F(y,x)} = 2x_1\overline{y}_1 + (1+i)\,x_1\overline{y}_2 + (1-i)x_2\overline{y}_1$$

Teorema 2..6 *Sea $F : V \times V \longrightarrow K$ una forma sesquilineal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *F es hermítica*
2. *$\forall A \in M_K(n)$ matriz coordenada de F se verifica: $A^* = A$*
3. *$\exists A \in M_K(n)$ matriz coordenada de F tal que $A^* = A$*

Demostr:
1) $\Longrightarrow$ 2)] Sea A la matriz coordenada de F respecto a la base $\{v_1,\ldots,v_n\}$. Se tiene:

$$A = (F(v_i,v_j)_{i,j=1}^n) \Rightarrow A^* = \overline{(A^T)} = \overline{(F(v_j,v_i)_{i,j=1}^n)} = (\,\overline{(F(v_j,v_i)_{i,j=1}^n}\,) = (F(v_i,v_j)_{i,j=1}^n) = A$$

2) $\Longrightarrow$ 3)] Inmediato.
3) $\Longrightarrow$ 1)] Sea A la matriz coordenada de F respecto a la base $\{v_1,\ldots,v_n\}$, verificando $A^* = A$. Entonces:

$$\forall u, v \in V, \quad F(u,v) = X^T\,A\overline{Y} = (X^T\,A\overline{Y})^T = \overline{Y}^T\,A^T\,X$$

$$\overline{F(u,v)} = \overline{\overline{Y}^T\,A^T\,X} = Y^T\,\overline{A}^T\,\overline{X} = Y^T\,A\,\overline{X} = F(v,u),$$

luego F es hermítica. ■

Definición 2..7 *Una matriz* $A \in M_K(n)$ *se dice* **hermítica** *si verifica que* $A^* = A$.

Teorema 2..8 *Las matrices hermíticas verifican:*

1. *Sea* $A \in M_{\mathrm{R}}(n)$, *A hermítica* $\Leftrightarrow$ *A es simétrica.*
2. *Sea* $A \in M_K(n)$,
   (a) *A hermítica* $\Leftrightarrow A^*$ *es hermítica.*
   (b) *A hermítica* $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, A^n$ *es hermítica.*
   (c) *Si A es regular, A hermítica* $\Leftrightarrow A^{-1}$ *es hermítica.*

Definición 2..9 *Sea V un espacio vectorial sobre K,* $K = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$. *Se denomina* **forma cuadrática** *sobre V a toda aplicación*

$$Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple:

$$\forall v \in V, \quad Q(v) = F(v, v)$$

siendo F una forma hermítica sobre V.

Observése (cf. [5]) que, en principio, la F podría ser una forma sesquilineal cualquiera , no necesariamente hermítica.

Consecuencia 2..10 *1.* $\forall v \in V, \quad Q(v) = F(v, v) \in \mathbb{R}$

2. $\forall v \in V, \forall t \in K, \quad Q(tv) = |t|^2 \, Q(v)$
3. *Toda forma hermítica, F, induce una forma cuadrática, Q, y, recíprocamente, dada una forma cuadrática Q puede determinarse la única forma hermítica F.*

Demostr:3) Si $K = \mathbb{R}$, basta observar que

$$\forall u, v \in V, \quad F(u, v) = \tfrac{1}{2} \left[Q(u + v) - Q(u) - Q(v)\right]$$

Si $K = \mathbb{C}$, basta observar que

$$\forall u, v \in V, \quad F(u, v) = \tfrac{1}{2} \left[Q(u + v) - Q(u) - Q(v)\right] + \frac{i}{2} \left[Q(u + iv) - Q(u) - Q(v)\right]$$

(Esta son las llamadas *fórmulas de polarización*).

Definición 2..11 *La forma hermítica única inducida por una forma cuadrática se denomina* **forma polar** *asociada a Q.*

Expresión coordenada de una forma cuadrática

Sea F la forma polar asociada a la forma cuadrática Q; fijada una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, la expresión coordenada de F será:

$$\forall u, v \in V, \quad F(u, v) = X^T \, A \, \overline{Y}$$

siendo A su matriz coordenada, que será hermítica. Entonces, la expresión coordenada de la forma cuadrática será:

$$\forall v \in V, \quad Q(v) = X^T \, A \, \overline{X}$$

Ejemplo 2..12 *Dada la forma hermítica*

$$F : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que

$$F(x, y) = F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1\overline{y}_1 + (1 + i) \, x_1\overline{y}_2 + (1 - i)x_2\overline{y}_1$$

su forma cuadrática asociada es:

$$Q : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$Q(x_1, x_2) = 2|x_1|^2 + (1 + i) \, x_1\overline{x}_2 + (1 - i)x_2\overline{x}_1 = 2|x_1|^2 + 2 \, Re((1 + i) \, x_1\overline{x}_2)$$

Así, por ejemplo,

$$Q(2i, 1+3i) = 2|2i|^2 + 2\,Re((1+i)(2i)(1-3i)) = 8 + 2\,Re(8+4i) = 24$$

Ejemplo 2..13 *Sea* $V = \mathcal{C}[0,1]$ *y* F *la forma hermítica (bilineal simétrica) dada por*

$$\forall f, g \in V, \quad F(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

la forma cuadrática asociada es

$$Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$Q(f) = \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

3. Ortogonalización.

Definición 3..1 *Sea $f : V \times V \longrightarrow K, K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, una forma hermítica sobre V*

- *Dos* **vectores** *v y w se dicen* **conjugados** *u ortogonales, y se escribe $v\perp w$, si F(v,w) = 0.*
- *Un* **vector** *$v \in V$ se dice* **conjugad**o *u ortogonal* **a un subconjunto** *$S \subseteq V$, y se escribe $v\perp S$, si F(v,w) = 0,*
- *Dos* **subconjuntos** *S y T se dicen* **conjugados** *u ortogonales , y escribimos $S\perp T$, si $F(v,w) = 0, \forall v \in S, \forall w \in T$*

Observese que $F(v,w) = 0 \Longleftrightarrow F(w,v) = 0$

Definición 3..2 *Dado un subconjunto $S \subset V$, F una forma hermítica sobre V, se denomina* **complemento ortogonal** *de S, $S^\perp$, al subconjunto*

$$S^\perp = \{v \in V \mid F(v,w) = 0, \forall w \in S\}$$

Proposición 3..3 *i) $S^\perp$ es un subespacio vectorial de $V, \forall S \subseteq V$*
ii) $v\perp\{v_1, ..., v_r\} \Longleftrightarrow v\perp K\{v_1, ..., v_r\}$
iii) $S \subseteq ((S^\perp)^\perp), \forall S \subseteq V$.

Demostr:
i) $0 \in S^\perp \Rightarrow S^\perp \neq \phi$

$$\forall v_1, v_2 \in S^\perp, \forall t_1, t_2 \in K, F(t_1\, v_1 + t_2\, v_2, w) = t_1\, F(v_1, w) + t_2\, F(v_2, w) = t_1\, 0 + t_2\, 0 = 0, \forall w \in S$$

ii)$\Longleftarrow$) Es inmediata
$\Longrightarrow$) $\forall w \in K\{v_1, \ldots, v_r\}\, \exists t_i \in K, i = 1, 2, \ldots, r$ tal que $w = t_1\, v_1 + \ldots + t_r\, v_r$

$$F(\sum_{i=1}^{r} t_i\, v_i, v) = \sum_{i=1}^{r} t_i\, F(v_i, v) = 0 \Longrightarrow v\perp K\{v_1, \ldots, v_r\}$$

iii)

$$\forall v \in S,\, w \in S^\perp, F(v,w) = 0 \Longrightarrow v\perp S^\perp \Longrightarrow v \in (S^\perp)^\perp \,\blacksquare$$

Observese que, en general, $S^\perp \neq (S^\perp)^\perp$. Por ejemplo, consideremos la forma hermítica siguiente:

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \hookrightarrow x_1 y_1$$

y el subespacio $S = \mathbb{R}\{(1, 1)\}$. Entonces,

$$S^\perp = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\} = \mathbb{R}\{(0, 1)\}$$

$$(S^\perp)^\perp = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2)\perp(0, 1)\} = \mathbb{R}^2$$

Proposición 3..4 *$\forall S \leq V$, $dim_K S^\perp \geq dim_K V - dim_K S$.*

Demostr: Sea $\{v_1, \ldots, v_p\}$ una base de S. La aplicación

$$g : V \longrightarrow K^p$$

$$v \hookrightarrow g(v) = (F(v, v_1), ..., F(v, v_r))$$

es lineal, ya que f es sesquilineal. Además, $ker\, g = S^\perp$

$$v \in kerg \Longleftrightarrow g(v) = 0 \Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, p,\; F(v_i, v) = 0 \Longleftrightarrow v \in S^\perp$$

Ahora, tenemos

$$dimV = dim\, ker\, g + rg\, g \leq dim\, ker\, g + dimK^p = dimS^\perp + p$$

Luego $dim_K\, S^\perp \geq dim_K\, V - dim_K\, S$. $\blacksquare$

Ejercicio 3..5 *Dada la forma hermítica*

$$F : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \hookrightarrow x_1\,\bar{y}_1 + x_2\,\bar{y}_2 + x_3\,\bar{y}_3$$

obtener el complemento ortogonal del subespacio $S = \mathbb{C}\{(1, i, 0)\}$

Definición 3..6 *Sea* F *una forma hermítica sobre* V*. Se denomina* **núcleo de f** *al complemento ortogonal de* V*, es decir,*

$$V^{\perp} = \{v \in V \mid F(v, w) = 0, \forall w \in V\}$$

Teorema 3..7 $V^{\perp} = \{0_V\} \iff F$ *es regular.*

Demostr:

$$v \in V^{\perp} \iff \forall w \in V, F(v, w) = X^T\, A\, \bar{Y} = 0_K, \forall Y^T \in K^n \iff X^*\, A = 0 \iff A\, X = 0.$$

Pero como $V^{\perp} = \{0_V\}$, el sistema solo tiene una única solución, es decir, rg $A = n \iff F$ es regular. ■

Definición 3..8 *Sea* F *una forma hermítica sobre* V

- $v \in V$ *se dice* **vector isótropo** *si* $F(v, v) = 0_K$
- $S \leq V$ *se dice* **subespacio isótropo** *si* $F(v, w) = 0_K, \forall v, w \in S$

Propiedad 3..9 $S \leq V$ *es isótropo* $\iff \forall v \in S$, v *es isótropo.*

Ejemplo 3..10 *La forma bilineal simétrica sobre* $\mathbb{R}^2$*,*

$$F(v, w) = x_1\, y_2 + x_2\, y_1$$

tiene como únicos subespacios isótropos los siguientes:

$$\{(0, 0)\}, \quad \mathbb{R}\{(1, 0)\}, \quad \mathbb{R}\{0, 1)\}$$

Ejemplo 3..11 *El núcleo de la forma hermítica sobre* $\mathbb{C}_3[x]$*,*

$$F(p(x),\, q(x)) = p'(0)\,\overline{q'(0)}$$

es

$$(\mathbb{C}_3[x])^{\perp} = \{a_0 + a_2\, x^2 + a_3\, x^3\}$$

y los subespacios isótropos serán subespacios engendrados por polinomios sin término en x.

Teorema 3..12 *Dada una forma hermítica* F *sobre* V*, si* $v_0 \in V$ *no es isótropo, se cumple:*

$$V = K\{v_0\} \oplus K\{v_0\}^{\perp}$$

Demostr: En primer lugar, cualquier vector $v \in V$ se puede poner como suma de uno de $K\{v_0\}$ y otro de $K\{v_0\}^{\perp}$. En efecto, basta poner:

$$v = \frac{F(v, v_0)}{F(v_0, v_0)}\, v_0 + (v - \frac{F(v, v_0)}{F(v_0, v_0)}\, v_0)$$

los dos sumandos cumplen: $F(v_0, v_0) \neq 0$ y

$$F(v - \frac{F(v, v_0)}{F(v_0, v_0)} v_0, v_0) = F(v, v_0) - \frac{F(v, v_0)}{F(v_0, v_0)}\, F(v_0, v_0) = F(v, v_0) - F(v, v_0) = 0$$

es decir, pertenece a $K\{v_0\}^{\perp}$.

Además, la suma suma es directa, ya que

$$\forall v \in K\{v_0\} \cap K\{v_0\}^{\perp} \Longrightarrow \exists t \in K,\, v = t\ v_0, \quad F(v, v_0) = 0$$

lo que implica $t = 0$, es decir, $v = 0$. ■

Corolario 3..13 *Si $v_0 \in S$ es no isótropo,*

$$S = K\{v_0\} \oplus (K\{v_0\}^{\perp} \cap S)$$

Definición 3..14 *Sea v_0 no isótropo, al vector*

$$\frac{F(v, v_0)}{F(v_0, v_0)} v_0$$

se le denomina **proyección ortogonal** *de $v \in V$ sobre v_0 y se le designa por $\overline{p}roy_{v_o}v$.*

Por ejemplo, dada la forma hermítica sobre C^3

$$F(v, w) = x_1\,\bar{y}_1 + x_2\,\bar{y}_2 + x_3\,\bar{y}_3$$

la proyección ortogonal del vector $v = (1, i, 1)$ sobre el vector $v_0 = (i, 0, 0)$ es el vector $(1, 0, 0)$.

3.1 Diagonalización ortogonal

Como consecuencia del teorema 3..12 y de su concecuencia 3..13, dada una forma hermítica F sobre V, siempre se puede encontrar una base de V de vectores conjugados respecto de la cual la matriz coordenada de F es diagonal. Veámoslo.

Definición 3..15 *Dada una forma hermítica F sobre V, una* **base** *$\{v_1, ..., v_n\}$ se dice* **ortogonal** *(o de vectores conjugados) si $F(v_i,\, v_j) = 0_K, \quad \forall i \neq j$*

Teorema 3..16 *Para cualquier subespacio $S \leq V$ se puede encontrar una base ortogonal*

Demostr: Se demuestra por inducción sobre $r = dim_K S$. Si $r = 1$, es trivial. Supóngase cierto para $r - 1$. Se presentan dos situaciones:
1) $\forall v \in S, \quad F(v,\, v) = 0$. En consecuencia, S es isótropo y todas las bases de S son ortogonales.
2) $\exists v_0 \in S, \quad F(v_0,\, v_0) \neq 0$. Aplicando el corolario 3..13, se obtiene:

$$S = K\{v_0\} \oplus (K\{v_0\}^{\perp} \cap S)$$

Por lo tanto, $dim\,(K\{v_0\}^{\perp} \cap S) = r - 1 < r$ y, por hipótesis de inducción, existe una base ortogonal $\{v_1, ..., v_{r-1}\}$ de $K\{v_0\}^{\perp} \cap S$. En consecuencia, $\{v_0, v_1, ..., v_{r-1}\}$ es una base ortogonal de S. ■

Corolario 3..17 *V posee una base ortogonal*

Obsérvese que la matriz coordenada de F respecto de una base ortogonal $\{v_1, ..., v_n\}$ de V es la matriz A diagonal

$$A = \begin{bmatrix} F(v_1,\, v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & F(v_n,\, v_n) \end{bmatrix}$$

y, evidentemente, el número de vectores no isótropos de esta base (es decir, el número de elementos no nulos de esta diagonal) es el rango de F.

Propiedad 3..18 *Toda matriz hermítica admite una matriz congruente hermítica diagonal*

Demostr: Basta considerar la forma hermítica asociada. ■

Veamos a continuación un ejemplo de cómo construir una base ortogonal, siguiendo las ideas expuestas, mediante el que llamaremos *método de los conjugados*.

Ejemplo 3..19 *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 1 \\ 1-i & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

encontrar una matriz cuadrada P regular tal que $P\ A\ P^*$ sea diagonal

Solución

```
Datos

In[8]:=
a={{0,1+I,1},{1-I,0,-1},{1,-1,0}};
q[v_List]:=   v.a.Conjugate[v];

In[10]:=   NullSpace[a]
Out[10]=  {}
La forma cuadrática es regular ==> existen vectores no isótropos. Tomamos v1 no isótropo

In[11]:=  v1={1,1,0};  q[v1]
Out[11]=  2

S1orto = subespacio ortogonal a v1 = {v={x,y,z}| v1.a.Conjugate[v] = 0}

In[17]:=
v={x,y,z};solv1v=Solve[Conjugate[v1].Conjugate[a].v==0,v];vsol=v/.solv1v
Out[17]=   {{I y,y,z}}

Escogemos
In[19]:=  v2 = {I,1,0}

que es no isótropo, ya que
In[20]:= q[v2]
Out[20]= -2

S2orto = subespacio ortogonal a v1 y v2  = {v={x,y,z}| v1.a.Conjugate[v] == 0,v2.a.Conjugate[v] == 0 }

In[24]:=
solv1v=Solve[{Conjugate[v1].Conjugate[a].v==0,
      Conjugate[v2].Conjugate[a].v==0},v];vsol=v/.solv1v
Out[24]=   ( (1/2 - I/2) z, (-1/2 - I/2) z, z)

Escogemos
In[26]:=  v3= {I,1,-1+I}

Nueva base: {v1,v2,v3} = {e1,e2,e3}.mq, siendo  mq = Transpose[p]
In[27]:=  mp={v1,v2,v3}
Out[27]=   {{1,1,0},{I,1,0},{I,1,-1+I}}

La matriz coordenada de q en la nueva base es diagonal
In[28]:=   mp.a.Conjugate[Transpose[mp]]
Out[28]= {{2,0,0},{0,-2,0},{0,0,2}}

Luego la matriz P pedida es la mp hallada; el cambio a la nueva base viene dado por la transpuesta de P, es decir,
In[30]:=   Transpose[mp];
Out[30]//MatrixForm=
          {{1, I, I},
          {1, 1, 1},
          {0, 0, -1 + I} }

Como siempre, esta matriz P^T tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la nueva base.
```

4. Diagonalización de formas cuadráticas.

El problema de la diagonalización de formas cuadráticas puede ser atacado por diversos procedimientos; cada uno de ellos busca una base del espacio vectorial V de tipo finito sobre K respecto de la cual la matriz coordenada de la forma cuadrática Q es diagonal, por lo que, si P^T es la matriz del cambio a la nueva base y A y D son las matrices coordenadas de Q respecto de ambas bases, se ha de verificar que

$$P\,A\,P^* = D.$$

Se pueden considerar 3 situaciones:

a) caso de que P sea simplemente regular, A y D son congruentes hermíticas (congruentes si $K = \mathbb{R}$) y la base correspondiente a D no es especial;

b) la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es "ortogonal", es decir, está compuesta por vectores conjugados que cumplen $F(v_i, v_j) = 0$; también ahora A y D son congruentes hermíticas (congruentes si $K = \mathbb{R}$).

c) caso particular del anterior, la base es ortonormada de vectores propios y la matriz P es ortogonal (lo estudiaremos más adelante).

Asociados a la situación a) anterior mencionaremos dos métodos.

El método más clásico para obtener la matriz D diagonal es el **método de Lagrange o de Gauss**. Este consiste en transformar la expresión coordenada de Q, respecto de la base inicial, en una suma de cuadrados de expresiones lineales en las coordenadas en número $r \leq n$. El conjunto de esas expresiones lineales (si $r < n$ habrá que añadir $n - r$ ecuaciones del tipo $y_i = x_i$) define las ecuaciones del cambio de coordenadas de la base nueva a la antigua; a partir de éstas se puede escribir inmediatamente la matriz P^{-1}.

Otro método consiste en utilizar las operaciones elementales y las matrices elementales para obtener una matriz diagonal congruente a la matriz coordenada de una forma cuadrática, determinando fácilmente la matriz del cambio a la base nueva. Este método lo denominaremos **método de diagonalización por congruencia** o de operaciones elementales, ya que consiste en realizar operaciones elementales de congruencia sobre la matriz A coordenada de la forma cuadrática, es decir, efectuar las mismas operaciones elementales sobre filas y columnas para llegar a una diagonal congruente; basta recordar que las operaciones sobre columnas requieren la utilizacin de la matriz elemental transpuesta de la utilizada para hacer la misma operación sobre las filas.

Ejercicios resueltos de estos tipos, además de los que se presentan a continuación, pueden verse en [7]

En los dos próximos ejercicios todos los pivotes necesarios son distintos de cero.

Ejercicio 4..1 *Sea la forma cuadrática Q sobre $\mathbb{C}^3$ definida por: $Q(x) = X^T\,A\,\overline{X}$, siendo la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 0 & 1-i \\ 0 & 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz diagonal congruente hermítica con A.

Solución:

Observemos en primer lugar que la matriz A es hermítica, pues $A^* = A$.

```
In[84]:=mai=Transpose[Join[Transpose[a],IdentityMatrix[3]]];MatrixForm[mai]
Out[84]       {2, I, 0, 1, 0, 0},
              {-I, 0, 1 - I, 0, 1, 0},
              {0, 1 + I, 1, 0, 0, 1}

In[85]:=ele1 = el[2,1,I/2,3]; mai=ele1.mai.el[1,2,-I/2,6]; mai//MatrixForm
Out[85]       {2, 0, 0, 1, 0, 0},
              {0, -1/2, 1 - I, I/2, 1, 0},
              {0, 1 + I, 1, 0, 0, 1}
```

```
In[86]:=ele2 = el[3,2,(1+I)/(1/2),3];mai=ele2.mai.el[2,3,(1-I)/(1/2),6];mai//MatrixForm
Out[86]       {2, 0, 0, 1, 0, 0},
              {0, -1/2, 0, I/2, 1, 0},
              {0, 0, 5, -1 + I, 2 + 2 I, 1}

In[87]:=di = Table[mai[[i,j]],{i,3},{j,3}]
              p = Table[mai[[i,j]],{i,3},{j,4,6}]
Out[87]={{2, 0, 0}, {0, -1/2, 0}, {0, 0, 5}}
Out[88]={{1, 0, 0}, {I/2, 1, 0}, {-1 + I, 2 + 2 I, 1}}

In[89]:= p.a.Transpose[Conjugate[p]]==di
Out[89]=    True

Matriz del cambio de la base {v_i} a la base nueva {w_k}:
In[90]:=   q = Transpose[p]
Out[90]=  {{1, I/2, -1 + I}, {0, 1, 2 + 2 I}, {0, 0, 1}}

Nueva base
In[91]:=Thread[{w1,w2,w3} == {v1,v2,v3}.q]//MatrixForm
Out[91]
          w1 == v1,
          w2 ==I v1/2 + v2,
          w3 == (-1 + I)  v1 + (2 + 2 I) v2 + v3
```

Ejercicio 4..2 *Sea la forma cuadrática sobre* $\mathbb{R}^3$ *definida por:* $Q(x) = X^T A X$*, siendo la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz diagonal congruente con A*.*

Solución:

```
In[70]:=mai=Transpose[Join[Transpose[a],IdentityMatrix[3]]]; MatrixForm[mai]
Out[70]       {1, 1, 0, 1, 0, 0},
              {1, 2, 2, 0, 1, 0},
              {0, 2, 5, 0, 0, 1}

In[71]:=ele1 = el[2,1,-1,3]; mai=ele1.mai.el[1,2,-1,6]; mai//MatrixForm
Out[71]        {1, 0, 0, 1, 0, 0},
              {0, 1, 2, -1, 1, 0},
              {0, 2, 5, 0, 0, 1}

In[72]:=ele2 = el[3,2,-2,3]; mai=ele2.mai.el[2,3,-2,6]; mai//MatrixForm
Out[72]       {1, 0, 0, 1, 0, 0},
              {0, 1, 0, -1, 1, 0},
              {0, 0, 1, 2, -2, 1}

In[73]:=di = Table[mai[[i,j]],{i,3},{j,3}]
              p = Table[mai[[i,j]],{i,3},{j,4,6}]

Out[73]={{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}
Out[74]={{1,0,0},{-1,1,0},{2,-2,1}}

In[75]:=p.a.Transpose[Conjugate[p]]==di
Out[75]=  True

Matriz del cambio de la base {v_i} a la base nueva {w_k}:

In[76]:= q = Transpose[p]
Out[76]=  {{1,-1,2},{0,1,-2},{0,0,1}}

Nueva base
In[81]:=Thread[{w1,w2,w3} == {v1,v2,v3}.q]//MatrixForm
Out[81]   w1 == v1,
               w2 == -v1 + v2,
               w3 == 2 v1 - 2 v2 + v3
```

En el caso de que alguno de los pivotes a utilizar sea nulo se le suma a la fila y columna correspondientes una de las posteriores y se sigue como en los ejemplos anteriores. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 4..3 *Sea la forma cuadrática sobre* $\mathbb{R}^3$ *definida por:* $Q(x) = X^T A X$*, siendo la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz diagonal congruente con A*.*

Solución:

```
In[102]:=mai=Transpose[Join[Transpose[a],IdentityMatrix[3]]];MatrixForm[mai]
Out[102]{0, 1, 1, 1, 0, 0},
         {1, 0, 1, 0, 1, 0},
         {1, 1, 0, 0, 0, 1}

In[103]:=ele1 = el[1,2,1,3]; mai=ele1.mai.el[2,1,1,6];mai//MatrixForm
Out[103]{2, 1, 2, 1, 1, 0},
         {1, 0, 1, 0, 1, 0},
         {2, 1, 0, 0, 0, 1}

In[104]:=ele2 = el[2,1,-1/2,3]; mai=ele2.mai.el[1,2,-1/2,6];mai//MatrixForm
Out[104]{2, 0, 2, 1, 1, 0},
         {0, -1/2, 0, -1/2, 1/2, 0},
         {2, 0, 0, 0, 0, 1}

In[105]:=ele3 = el[3,1,-1,3];mai=ele3.mai.el[1,3,-1,6];mai//MatrixForm
Out[105]{2, 0, 0, 1, 1, 0},
         {0, -1/2, 0, -1/2, 1/2, 0},
         {0, 0, -2, -1, -1, 1}

In[106]:= di = Table[mai[[i,j]],{i,3},{j,3}]
                p = Table[mai[[i,j]],{i,3},{j,4,6}]
Out[106]= {{2, 0, 0}, {0, -1/2, 0}, {0, 0, -2}}
Out[107]= {{1, 1, 0}, {-1/2, 1/2, 0}, {-1, -1, 1}}

In[108]:=  p.a.Transpose[Conjugate[p]]==di
Out[108]=   True

Matriz del cambio de la base {v_i} a la base nueva {w_k}:
In[109]:=   q = Transpose[p]
Out[109]=     {{1, -1/2 -1}, {1, 1/2, -1}, {0, 0, 1}}

Nueva base
In[110]:=    Thread[{w1,w2,w3} == {v1,v2,v3}.q]//MatrixForm
Out[110]w1 == v1 + v2,
         w2 == -v1/2 + v2/2,
         w3 == -v1 - v2 + v3
```

Asociado a la situación b) anterior recordamos el método de los conjugados en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 4..4 *Sea la forma cuadrática sobre* $\mathbb{R}^3$ *definida por:* $Q(x) = X^T A X$*, siendo la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz diagonal congruente hermítica con A*, utilizando el método de los conjugados.*

Solución:

```
In[1]:=a = {{0,1,1},{1,-2,2},{1,2,-1}};  q[v_List]:= v.a.v;

In[2]:=NullSpace[a]
Out[2]=    {}

La forma cuadrática es regular ==> existen vectores no isótropos.
Tomamos v1 no isótropo
In[3]:=v1 = {0,1,0};    q[v1]
```

```
Out[3]=-2

S1 = subespacio ortogonal a v1 = {v={x,y,z}| v1.a.v = 0}
In[4]:=v={x,y,z}; solv1v = Solve[v1.a.v == 0, v]; vsol=v/.solv1v
Out[4]={{2 y - 2 z, y, z}}

Escogemos
In[5]:=v2 = vsol/.{y->1,z->0}//Flatten
Out[5]={2, 1, 0}

que es no isótropo
In[6]:=q[v2]
Out[6]=2

S2 = subespacio ortogonal a v1 y v2  = {v={x,y,z}| v1.a.v = 0,v2.a.v = 0 }
In[7]:=v={x,y,z}; solv1v = Solve[{v1.a.v == 0,v2.a.v == 0}, v]; vsol=v/.solv1v
Out[7]={{-4 z, -z, z}}

Escogemos
In[8]:=v3 = vsol/.{z->-1}//Flatten
Out[8]={4, 1, -1}

Nueva base: {v1,v2,v3} = {e1,e2,e3}.mq, siendo  mq = Transpose[p]
In[9]:=mp = {v1,v2,v3}
Out[9]= {{0, 1, 0}, {2, 1, 0}, {4, 1, -1}}

La matriz coordenada de q en la nueva base es diagonal
In[10]:=    mp.a.Transpose[mp]
Out[10]= {{-2, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, -7}}

Luego la matriz P pedida es la transpuesta de  la mp hallada, es decir,
In[11]:= P = Transpose[mp];P//MatrixForm
Out[11]
     0    2    4
     1    1    1
     0    0    -1
```

La diferencia entre los dos métodos presentados es que, siempre que los pivotes a utilizar no se anulen, el método de congruencias (y también el método de Lagrange) proporciona una matriz de cambio de base triangular, mientras que la del método de los conjugados no es triangular en general.

De cualquier modo que se proceda, ya que la matriz coordenada de la forma cuadrática respecto de la nueva base es diagonal, resulta que ésta será una base ortogonal respecto de Q. En consecuencia, podemos dar la siguiente definición.

Definición 4..5 *Sea Q una forma cuadrática Q sobre V. Se denomina* **signatura** *de una base ortogonal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V al número de vectores v_i tales que $Q(v_i) > 0$.*

Teorema 4..6 *(***Ley de inercia de Sylvester***) Todas las bases ortogonales tienen la misma signatura.*

Demostr: Sean dos bases $\{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_{s'}, w_{s'+1}, \ldots, w_n\}$ con signaturas respectivas s y s'.

Sean $S = K\{v_1, \ldots, v_s\}$ y $T = K\{w_{s'+1}, \ldots, w_n\}$. Entonces, si $v \in S$, $Q(v) \geq 0$, y si $v \in T$, $Q(v) \leq 0$. Por lo tanto, $S \cap T = \{0_V\}$ y la suma de S y T es suma directa, luego:

$$\dim\ (S + T) = s + n - s' \leq n \Longrightarrow s \leq s'$$

Cambiando los papeles de las bases resultaría: $s' \leq s$. Luego, $s = s'$. ∎

Definición 4..7 *Sea Q una forma cuadrática sobre V. Se denomina* **signatura** *de Q (o de la forma hermítica polar) a la signatura de cualquier base ortogonal.*

Definición 4..8 *Sea A una matriz hermítica. Se denomina* **signatura** *de A a la signatura de la forma cuadrática asociada*

Observación.- Ya que todas las matrices coordenadas de una forma cuadrática tienen el mismo rango y la misma signatura, el número de elementos positivos y el de negativos en cualquier forma diagonal es el mismo, por eso algunos autores prefieren denominar signatura al par (s, t) en donde s es la signatura (número de los positivos) y t = r - s (número de los negativos = rango de Q menos signatura).

Definición 4..9 *Se dice que una forma cuadrática Q es definida (positiva o negativa) si* $Q(v) > 0, \forall v \in V$ *o si* $Q(v) < 0, \forall v \in V$*, respectivamente.*

Se dice que una forma cuadrática Q es semidefinida (positiva o negativa) si $Q(v) \geq 0, \forall v \in V$ *o si* $Q(v) \leq 0, \forall v \in V$*, respectivamente.*

Se dice que una forma cuadrática Q es indefinida si $Q(v) \geq 0$*, para algunos* $v \in V$ *y* $Q(v) \leq 0$*, para otros* $v \in V$*.*

De igual forma se denominará a la matriz coordenada de un forma cuadrática.

4.1 Clasificación lineal de las formas cuadráticas.

Observación.- En el conjunto de las formas cuadráticas puede definirse una relación de equivalencia:

$$Q \sim Q' \Longleftrightarrow \text{rg } Q = \text{rg } Q' \quad \text{y sig } Q = \text{sig } Q'$$

lo cual permite realizar la siguiente clasificación

Teorema 4..10

1. *Q es definida positiva* $\Longleftrightarrow$ *rg* $Q =$ *sig* $Q =$ *dim* V
2. *Q es definida negativa* $\Longleftrightarrow$ *rg* $Q =$ *dim* V *y sig* $Q = 0$
3. *Q es semidefinida positiva* $\Longleftrightarrow$ *rg* $Q =$ *sig* $Q <$ *dim* V
4. *Q es semidefinida negativa* $\Longleftrightarrow$ *rg* $Q <$ *dim* V *y sig* $Q = 0$
5. *Q es indefinida* $\Longleftrightarrow$ *rg* $Q \leq$ *dim* V *y* $0 <$ *sig* $Q <$ *rg* Q

Ejemplo 4..11 *La forma cuadrática del ejemplo 4..1 tiene como una de sus matrices diagonales: diag (2,-1/2, 5), así que tiene: rg Q = 3, sig Q = 2, por lo tanto, es indefinida.*

Ejemplo 4..12 *La forma cuadrática del ejemplo 4..2 tiene como una de sus matrices diagonales: diag (1, 1, 1), así que tiene: rg Q = 3, sig Q = 3, por lo tanto, es definida positiva.*

Ejemplo 4..13 *La forma cuadrática del ejemplo 4..3 tiene como una de sus matrices diagonales: diag (2, -1/2, -2), así que tiene: rg Q = 3, sig Q = 1, por lo tanto, es indefinida.*

Ejemplo 4..14 *La forma cuadrática del ejemplo 3..19 tiene como una de sus matrices diagonales: diag (2, -2, 2), así que tiene: rg Q = 3, sig Q = 2, por lo tanto, es indefinida.*

5. Aplicaciones

5.1 *Extremos de funciones escalares*

Una aplicación interesante del resultado precedente es la discusión de los puntos críticos de una función escalar de variable vectorial, en donde la forma cuadrática a estudiar es la hessiana de la función en cada uno de los puntos críticos: los máximos corresponden al caso definida negativa, los mínimos a definida positiva, puntos silla o puerto a indefinida, casos especiales a semidefinida.

Ejercicio 5..1 *Encontrar y discutir los puntos críticos de la función*

$$f(x, y) = 2 + (x + y)^2 - y\, sen(y) - x^3$$

cuya gráfica aparece en la figura 1.

Figure 1.—Gráfica de la función $f(x, y) = 2 + 2(x + y)^2 - y\,\mathrm{sen}(y) - x^3$.

5.2 *Factorización de Cholesky*

En el caso de que una matriz hermítica A (o la forma hermítica que ella define) sea definida positiva, se puede factorizar de un modo especialmente interesante por sus aplicaciones, como se ve en el siguiente

Teorema 5..2 *Sea* $A \in M_K(n)$, $\quad K = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$, *una matriz hermítica y definida positiva. Entonces, existe una única matriz* $L \in M_K(n)$, *triangular inferior con* $l_{i\,i} > 0$, *tal que*

$$A = L\, L^*$$

Demostr: Basta realizar la diagonalización de la matriz A mediante el método de las "congruencias" o el de Lagrange hasta llegar a una matriz diagonal coincidente con la identidad.

Esto se puede conseguir siempre, pues, como la matriz A es definida positiva, todos los pivotes a utilizar serán estrictamente positivos y, en consecuencia, la matriz P tal que $P\,A\,P^* = I$ será triangular inferior regular.

Finalmente, la matriz $L = P^{-1}$ verifica: $A = L\,L^*$.■

Definición 5..3 *La factorización presentada en el teorema anterior se denomina* **factorización de Cholesky** *de la matriz A hermítica.*

Ejercicio 5..4 *Encontrar la factorización de Cholesky de la matriz hermítica*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2i & 0 \\ 2i & 2 & 2i \\ 0 & -2i & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

```
In[14]:=   a = {{4,-2 I,0},{2 I,2, 2I},{0,- 2I,5}};
In[15]:= mai=Transpose[Join[Transpose[a],IdentityMatrix[3]]]; MatrixForm[mai]
Out[15]
          {4, -2 I, 0, 1, 0, 0},
          {2 I, 2, 2 I, 0, 1, 0},
          {0, -2 I, 5, 0, 0, 1}

In[16]:=ele1 = el[2,1,-2 I/4,3];mai=ele1.mai.el[1,2, 2I/4,6];mai//MatrixForm
Out[16]
          {4, 0, 0, 1, 0, 0},
          {0, 1, 2 I, - I/2, 1, 0},
          {0, -2 I, 5, 0, 0, 1}

In[17]:= ele2 = el[3,2,2 I,3];mai=ele2.mai.el[2,3,-2 I,6];mai//MatrixForm
Out[17]
          {4, 0, 0, 1, 0, 0},
          {0, 1, 0, - I/2, 1, 0},
          {0, 0, 1, 1, 2 I, 1}

In[18]:=  ele3 = el[1,1,1/2,3];mai=ele3.mai.el[1,1,1/2,6];mai//MatrixForm
Out[18]
          {1, 0, 0, 1/2, 0, 0},
          {0, 1, 0, -I/2, 1, 0},
          {0, 0, 1, 1, 2 I, 1}

In[21]:=di = Table[mai[[i,j]],{i,3},{j,3}]
p = Table[mai[[i,j]],{i,3},{j,4,6}]
l = Inverse[p]
Out[21]=     {{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}
Out[22]=      {{1/2, 0, 0}, {-I/2, 1, 0}, {1, 2\ I, 1}}
Out[23]=     {{2,0,0},{I,1,0},{0,-2 I,1}}

In[24]:= a == l.Transpose[Conjugate[l]]
Out[24]=     True
```

Observación

Esta factorización de Cholesky es muy útil y por eso suele aparecer en las librerías de los ordenadores, aunque no en la forma presentada aquí. Por el contrario, allí se supone que tal factorización existe y se determinan los elementos de la matriz L resolviendo las ecuaciones sucesivas (no simultaneas) que resultan al identificar los elementos de la matriz A y los de $L\,L^*$ en el orden siguiente: $a_{1\,1}, a_{2\,1}, \ldots, a_{n\,1}, a_{2\,2}, \ldots, a_{n\,2}, \ldots, a_{n\,n}$. Si alguno de los denominadores que aparecen se anula es debido a que la matriz inicial no es definida positiva y, en consecuencia, no se puede obtener esta factorización.

5.2.1 Aplicación

La factorización de Cholesky puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matriz asociada hermítica; tiene especial interés cuando dicho sistema debe ser resuelto un gran número de veces, ya que la matriz L puede ser guardada en la memoria del ordenador.

El proceso a seguir será el siguiente:

1) obtener la factorización de Cholesky $A = L\,L^*$

2) Descomponer el sistema $A\,X = B$ en dos nuevos sistemas: $L\,Z = B, \quad L^*\,X = Z$

3) Resolver por sustitución progresiva el primer sistema

4) Resolver por sustitución regresiva el segundo sistema.

Ejemplo 5..5 *Resolver por el método de Cholesky el sistema $A\,X = B$, siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2i & 0 \\ 2i & 2 & 2i \\ 0 & -2i & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz A es la del ejercicio 5..4, por lo que la L es la construida allí.

```
In[12]:= z=LinearSolve[l,b]
Out[12]= {1/2, I/2, -1}

In[14]:= x = LinearSolve[Transpose[Conjugate[l]],z]
Out[14]= {-1, 5 I/2, -1}

In[15]:=   a.x == b
Out[15]=      True
```

5.3 Descomposición $L\,D\,L^*$

En el caso de que una matriz hermítica A (o la forma hermítica que ella define) no sea definida positiva, no se puede obtener la factorización de Cholesky, sin embargo, se puede factorizar en la forma $A = L\,D\,L^*$, L triangular inferior, D diagonal, que también es interesante por sus aplicaciones. Si se exige que los elementos $l_{kk} = 1$, es única y será posible si en el proceso seguido para diagonalizar no surge ningún pivote igual a cero, lo cual equivale a que los menores principales de la matriz A son no nulos. En algunos libros aparece como **factorización de Crout**.

El proceso para conseguir una tal factorización consiste en llegar a la forma diagonal D mediante alguno de los procedimientos explicados más arriba; habitualmente, se encuentra identificando los elementos de A con los del producto $L\,D\,L^*$ y resolviendo el sistema de ecuaciones que sale por sustitución.

Una aplicación inmediata de esta factorización es la **resolución de sistemas lineales** con matriz de coeficientes simétrica (no necesariamente definida positiva).

El proceso a seguir será el siguiente:
1) obtener la factorización de Crout $A = L\,D\,L^*$
2) Descomponer el sistema $A\,X = B$ en tres nuevos sistemas: $L\,Z = B$, $\quad D\,S = Z$, $\quad L^*\,X = S$
3) Resolver por sustitución progresiva el primero
4) Resolver el sistema diagonal
5) Resolver por sustitución regresiva el tercer sistema.

Ejemplo 5..6 *Resolver por el método de Cholesky el sistema $A\,X = B$, siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3/2 & 3/2 \\ 2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Diagonalizando la matriz A mediante el método de las congruencias (o resolviendo el sistema indicado en este apartado) se obtienen las matrices L y D siguientes:

```
Out[11]:=  L = {{1,0,0},{1,1,0},{1,1,1}}
Out[12]: = D ={{2, 0, 0}, {0, -1/2, 0}, {0, 0, -2}}

Observar que la forma cuadrática asociada es indefinida.

In[13]:=   z = LinearSolve[L,b]
Out[13]={2,0,1}

In[14]:=  u=LinearSolve[D,z]
Out[14]= {1, 0, -1/2}

In[15]:=   x =LinearSolve[Transpose[L],u]
Out[15]=  {1, 1/2, -1/2}

Comprobación:
In[16]:=   A.x == B
Out[16]=    True
```