Matriz de Jordan

M. Palacios

Dpto. Matemática Aplicada (CPS)
Universidad de Zaragoza, Spain.

Contents

Referencias

[1] Merino, L. y Santos, E.: Algebra lineal con métodos elementales. *Ed. Los autores, Universidad de Granada*. 1997.

[2] Burgos, J. de: Algebra lineal. *McGraw-Hill*. 1993.

[3] Guzman, M. de: Ecuaciones diferenciales ordinarias. *Alhambra*. 1975.

[4] Baker, A.C. and Porteous, H.L.: Linear Algebra and Differential Equations. *Ellis Horwood*. 1990.

[5] Aroca, J. M. y Fernández Bermejo, M. J.: Algebra lineal y geometría. *Universidad de Valladolid*.1988.

[6] Castellet, M. y Llerena, I.: Algebra lineal y geometría. *Reverté*. 1992.

[7] Diego, B. de et al. : Problemas de Algebra lineal (2 ed.). *Deimos*. 1986.

[8] Bloom, D.M.. : Linear Algebra and Geometry. *Cambridge*. 1979.

1 La matriz de Jordan

1.1 *Introducción*

En este capítulo se trata de localizar una base de un espacio vectorial respecto de la cual la matriz coordenada de un endomorfismo sea lo más sencilla posible, en concreto, diagonal por bloques triangulares superiores. Para ello hace falta descubrir cómo actua el endomorfismo sobre algunos subespacios, es decir, conocer la estructura del espacio vectorial con respecto al endomorfismo.

El problema se puede formular en el siguiente contexto. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K (R ó C), de dimensión finita, $dim\, V = n$. Sea $f \in \mathrm{E}nd\, V$, un endomorfismo de V cuyos valores propios, $t_1, t_2, \ldots, t_r$ pertenecen todos al cuerpo K y tienen multiplicidad algebraica m_j, $j = 1, \ldots, r$, respectivamente. En consecuencia, el polinomio característico del endomorfismo f puede ser factorizado en la forma

$$p_f(x) = (x - t_1)^{m_1} (x - t_2)^{m_2} \ldots (x - t_r)^{m_r}$$

1.2 *Subespacios fundamentales generalizados*

Se puede dar a continuación la definición de un concepto ligeramente más general que el de subespacio fundamental.

Definición 1 .– *Se denomina subespacio propio (también núcleo) generalizado del endomorfismo f asociado al valor propio t_j al núcleo del endomorfismo $(f - t_j\, id_V)^{m_j}$, es decir,*

$$N(t_j, m_j) = Ker(f - t_j\, id_V)^{m_j} = \{v \in V \| (f - t_j\, id_V)^{m_j}(v) = 0\}$$

Una consecuencia inmediata de esta definición es la siguiente

Consecuencia 2 .–

$$S(t_j) \subset N(t_j,\, k), \quad m_j \geq k > 1$$

Otra consecuencia importante es la siguiente

Consecuencia 3 .– *Los subespacios propios generalizados son subespacios invariantes por el endomorfismo f, es decir,*

$$f(N(t_j,\, m_j)) \subset N(t_j,\, m_j)$$

Demostr.: Basta tener en cuenta que

$$(f - t_j\, id_V) \circ f = f \circ f - t_j\, f = f \circ (f - t_j\, id_V) \ \blacksquare$$

1.3 *Descomposición de Schur, triangulación de una matriz cuadrada*

La importancia de los subespacios propios generalizados estriva en que el espacio vectorial V puede ser descompuesto en suma directa de todos ellos. Antes de probarlo, se deben conocer algunos resultados importantes también por sí mismos.

Teorema 4 .– *Sea $A \in M_K(n)$, cuyo polinomio característico puede ser factorizado en la forma, $p_A(x) = (x - t_1)^{m_1}(x - t_2)^{m_2} \dots (x - t_r)^{m_r}$, entonces, A es semejante a una matriz T, triangular superior diagonal por bloques, de la forma*

$$T = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{bmatrix}, \; con\; A_j = \begin{bmatrix} t_j & & * \\ & \ddots & \\ & & t_j \end{bmatrix} \in M_K(m_j)$$

Demostr.: Se desarrolla por inducción sobre n.

1) Si $n = 1$, es trivial

2) Sea $v_1 \in K^n$ un vector propio asociado al valor propio t_1, es decir, $A\,v_1 = t_1\,v_1$. Se completa con $n-1$ vectores hasta conseguir una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de K^n. Sea P_1 la matriz del cambio de base, es decir, las columnas de P_1 son las coordenadas de los vectores v_i respecto de la base inicial. Por semejanza de matrices se verificará:

$$P_1^{-1}\,A\,P_1 = \begin{bmatrix} t_1 & * \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Por hipótesis de inducción, existe una matriz $P_{22} \in GL_K(n-1)$ tal que

$$P_{22}^{-1}\,B\,P_{22} = \mathrm{d}iag.bloq.\left(B_1, \ddots, B_r\right)$$

donde los B_j ya son como los del enunciado. Si se toma

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}$$

queda, por semejanza,

$$(P_1\,P_2)^{-1}\;A\,P_1\,P_2 = \begin{bmatrix} t_1 & \beta & & \alpha & \\ & B_1 & & & \\ & & B_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} & \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix} = C$$

Denominando por $C_{22} = $ diag. bloq. $(A_2, \dots, A_r)$, se debe buscar ahora una matriz

$$P_3 = \begin{bmatrix} I_{m_1} & \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & I_{n-m_1} \end{bmatrix}$$

que define un nuevo cambio de base y que verifique:

$$P_3^{-1}\,C\,P_3 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} = T$$

que será la del enunciado. Para ello no hay más que expresar la relación de semejanza anterior en la forma $C\,P_3 = P_3\,T$, y como

$$C\,P_3 = \begin{bmatrix} A_1 & \begin{pmatrix} \alpha + t_1\,\mu \\ 0 \end{pmatrix} \\ & C_{22} \end{bmatrix} \text{ y } P_3 \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \begin{pmatrix} \mu\,C_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}$$

resulta que, para que exista tal cambio, la ecuación

$$t_1\,\mu + \alpha = \mu\,C_{22} \Longleftrightarrow \mu = \alpha\,(C_{22} - t_1\;I)^{-1}$$

debe tener solución. Pero esto es cierto, pues es suficiente observar que $(C_{22} - t_1\;I)^{-1}$ es regular, ya que t_1 no es valor propio de C_{22} que solo contiene bloques A_j asociados a los valores propios $t_2, \ldots, t_r$ Queda así probada la triangulación propuesta. ■

Propiedad 5 .– *Sea $A \in M_K(m)$, triangular superior con $a_{ii} = t$, $\forall i$, entonces,*

1) $A - \mu\,I$ *es regular si* $\mu \neq t$

2) $(A - t\,I)^m = 0$

Demostr.: 1) Basta observar que los valores propios de A son iguales a t y son los que hacen a $A - \mu\,I$ singular.

2) Es suficiente construir la potencia n-ésima, teniendo en cuenta que $A - t\,I$ es triangular superior con ceros en la diagonal. ■

1.4 Primer teorema de estructura

Teorema 6 .– *Bajo las hipótesis enunciadas al principio, se verifica (cf. [8]):*

1) $V = N(t_1, m_1) \oplus \ldots \oplus N(t_r, m_r)$

2) *dim* $N(t_j, m_j) = m_j$, $\forall j = 1, 2, \ldots, r$

Demostr.: Por el teorema 4 (de triangulación), existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_{m_1}, \ldots, v_{m_1+m_2}, \ldots, v_n\}$ respecto de la cual la matriz coordenada del endomorfismo f es

$$T = \text{diag. bloq. } (A_1, \ldots, A_r), \text{ con } A_j = \begin{bmatrix} t_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_j \end{bmatrix} \in M_K(m_j)$$

Por ser T matriz diagonal por bloques, la matriz coordenada del endomorfismo $(f - t_1\,id_V)^{m_1}$ respecto de la base B será

$$\text{diag. bloq. } ((A_1 - t_1\,I)^{m_1}, \ldots, (A_r - t_1\,I)^{m_1})$$

que debe coincidir con la matriz

$$\text{diag. bloq. } (0, B_2, \ldots, B_r)$$

por el teorema 4, siendo las matrices $B_2, \ldots, B_r$ regulares (por prop. 5); por lo tanto,

$$N(t_1, m_1) = \text{Ker } (f - t_1\, id_V)^{m_1} = K\{v_1, \ldots, v_{m_1}\}$$

De la misma forma se prueba que:

$$N(t_j, m_j) = \text{Ker } (f - t_j\, id_V)^{m_j} = K\{v_{m_1+\ldots+m_{j-1}+1}, \ldots, v_{m_j}\}, \quad \forall j \ \blacksquare$$

Ejemplo 7 .– *Encontrar la descomposición anterior para el endomorfismo $f \in R^3$ definido por su ecuación matricial $Y = A\,X$,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluc.:

$p_A(x) = det(A - x\,I) = x(x-1)^2 \Longrightarrow t_1 = 0, m_1 = 1; t_2 = 1, m_2 = 2$

$N(t_1, m_1) = N(0,1) = \text{Ker}(f) = R\{(1,-1,0)\}$

$N(t_2, m_2) = N(1,2) = \text{Ker}(f - id_{R^3})^2) = R\{(1,0,-1),(0,1,0\}$

Finalmente, se tiene: $R^3 = N(0,1) \oplus N(1,2)$ $\blacksquare$

1.5 Base de cadenas

Propiedad 8 .– *Sea $g \in End\ V$ un endomorfismo tal que $g^m = 0$, para algún m. Entonces, existe una base de V respecto de la cual g tiene como matriz coordenada*

$$diag.\ bloq.\ (J_1, \ldots, J_r)$$

siendo

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \text{ ó } J_i = (0)$$

estando r y el tamaño de los bloques J_i determinado por g

Demostr.: En primer lugar, obsérvese el significado de la existencia de tal matriz diagonal por bloques. Para ello considérese el siguiente ejemplo: sea la base $\{a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ y la matriz coordenada del endomorfismo g respecto de esta base

$$\text{diag. bloq.} \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Teniendo en cuenta cómo se define la matriz coordenada de un endomorfismo, los datos mencionados significan que:

$$\begin{aligned} &g(a_1) = 0 \\ &g(b_1) = 0, \quad g(b_2) = b_1 \\ &g(c_1) = 0, \quad g(c_2) = c_1, \quad g(c_3) = c_2, \quad g(c_4) = c_3 \end{aligned} \tag{1}$$

es decir, la base aparece partida en tres *cadenas*, cada una correspondiente a un bloque diagonal; el primer vector de cada cadena es un vector propio asociado al valor propio 0, los restantes tienen como imagen el anterior en la cadena.

Recíprocamente, una base así construida conduce forzosamente a una matriz como la del enunciado.

En consecuencia, la proposición quedará probada si se demuestra la existencia de una base formada por cadenas, lo que haremos enseguida constructivamente.

Obsérvese que en el ejemplo previo se tiene:

$$\begin{aligned}
&\text{Ker } g = K\{a_1, b_1, c_1\} \\
&\text{Ker } g^2 = K\{a_1, b_1, b_2, c_1, c_2\} \\
&\text{Ker } g^3 = K\{a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3\} \\
&\text{Ker } g^4 = V = K\{a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4\}
\end{aligned} \tag{2}$$

y que

$$\text{Ker } g \subset \text{Ker } g^2 \subset \text{Ker } g^3 \subset \text{Ker } g^4 = \text{Ker } g^5 = ... = K^7;$$

además, llamando

$$p_1 = \text{dim Ker } g, \text{ y } p_i = \text{dim Ker } g^i - \text{dim Ker } g^{i-1},\ i > 1$$

se cumple que:

$p_1 = \text{dim Ker } g = 3 = \text{num. bloques en la diagonal}$

$p_2 = \text{dim Ker } g^2 - \text{dim Ker } g = 5 - 3 = 2$

$p_3 = \text{dim Ker } g^3 - \text{dim Ker } g^2 = 6 - 5 = 1$

$p_4 = \text{dim Ker } g^4 - \text{dim Ker } g^3 = 5 - 6 = 1$

de forma que $\sum_{i=1}^{4} p_i = n = dim\, V$.

En general, si se define: $q_i = p_i - p_{i+1},\ i = 1, 2, ..., \rho - 1, \quad q_\rho = p_\rho$, éste representa el número de bloques de orden i en la diagonal, que coincide con el número de cadenas de orden i.

Por lo tanto, el número de submatrices en la diagonal y su tamaño están determinados por el endomorfismo g y no por la base particular que se tome.

Suele denominarse *partición de multiplicidades* a la determinación de los p's y los q's

Una forma práctica y simple de organizar los cálculos consiste en construir, procediendo por columnas, la tabla siguiente:

k	dim Ker $g^k = n - \text{rg }(A^k)$	p	q
1	n_1	$p_1 = n_1$	$q_1 = p_1 - p_2$
2	n_2	$p_2 = n_1 - n_2$	$q_2 = p_2 - p_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\rho \leq m$	n_ρ	$p_\rho = n_\rho - n_{\rho-1}$	$q_\rho = p_\rho$

Procedimiento para localización de cadenas

(cf. B. de Diego, pág. 333)

Un procedimiento para encontrar una base de cadenas es el que se describe de manera sucinta a continuación:

1. Obtener la partición de multiplicidades
2. Construir los subespacios $N(0, j), \forall j = 0, 1, 2, \dots, \rho$
3. En $N(0,\rho) - N(0,\rho-1)$ elegir q_ρ vectores linealmente independientes, $a^1_\rho, a^2_\rho, \dots, a^{q_\rho}_\rho$, y considerar la familia $B_\rho = \{g^{\rho-1}(a^1_\rho), g^{\rho-2}(a_{\rho^1}), \dots, g(a_{\rho^1}), a^1_\rho, g^{\rho-1}(a^2_\rho), \dots, g(a^2_\rho), a^2_\rho, \dots, a^{q_\rho}_\rho\}$
   Téngase en cuenta que: $g(N(0,j)) = N(0,j+1) \supset N(0,j)$, $\forall j$ y el contenido es estricto, pues caso contrario, $g^m(N(0,j) = N(0,j) = \{0\}$
4. En $N(0,\rho-1) - N(0,\rho-2)$ elegir $q_{\rho-1}$ vectores linealmente independientes, $a^1_{\rho-1}, a^2_{\rho-1}$, $\dots, a^{q_{\rho-1}}_{\rho-1}$, y considerar la familia $B_{\rho-1} = \{g^{\rho-2}(a^1_{\rho-1}), \dots, g(a^1_{\rho-1}), a^1_{\rho-1}, g^{\rho-2}(a^2_{\rho-2}), \dots, g(a^2_{\rho-1}), a^2_{\rho-1}, \dots$
   B_ρ
5. Repetir el proceso hasta llegar a q_1
6. En $N(0,1) - N(0,0)$ elegir q_1 vectores linealmente independientes $a^1_1, a^2_1, \dots, a^{q_1}_1$ y linealmente independientes de los de la familia B_2 y considerar la familia final

   $$B = \{a^1_1, a^2_1, \dots, a^{q_1}_1\} \cup B_2\,,$$

   que es una base de V constituida por cadenas, ya que por construcción cada vector tiene imagen igual al anterior, salvo los que comienzan cadena, cuya imagen es el vector nulo; por ejemplo,
   $g(a^1_1) = 0$, puesto que $a^1_1 \in N(0,1) = S(0)$
   $g(g^{\rho-2}(a^1_{\rho-1})) = g^{\rho-1}(a^1_{\rho-1}) = 0$, puesto que $a^1_{\rho-1} \in N(0,\rho-1)$
   $g(g^{\rho-1}(a^1_\rho)) = g^\rho(a^1_\rho) = 0$, puesto que $a^1_\rho \in N(0,\rho)$

Ejemplo 9 .– *Dado $g \in K^5$ mediante su ecuación matricial $Y = A\,X$*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

encontrar una base de cadenas.

Solución:

Por sucesivas multiplicaciones se encuentra que

$$A^4 = 0, \text{ luego } m = 4$$

y que

$$\text{rg } A = 3, \text{rg } A^2 = 2, \text{rg } A^3 = 1 \text{ y rg } A^4 = 0,$$

es decir,

$$\dim \text{ Ker } g = 2, \dim \text{ Ker } g^2 = 3, \dim \text{ Ker } g^3 = 4 \text{ y } \dim \text{ Ker } g^4 = 5 \text{ y } \rho = 4.$$

En consecuencia, la partición de multiplicidades para este g es como sigue:

$p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $p_4 = 1$ (obsérvese que $\sum p_i = 5 = dim\, K^5$),

así se obtienen los siguientes valores de q's:

$q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, $q_4 = 1$.

Se deduce que una base de cadenas constará de dos cadenas ($p_1 = 2$), la primera compuesta por un solo vector, ya que $q_1 = 1$, y la segunda compuesta por 4 vectores, ya que $q_4 = 1$.

Una base de cadenas, siguiendo el procedimiento expuesto más arriba, se obtendrá de la siguiente forma:

En este caso, $\rho = 4$, así que Ker $g^4 = K^5$;

además,

Ker $g^3 = K\{(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5); x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0\}$;

como $q_4 = 1$, se ha de escoger un solo b_4 que puede ser cualquier vector perteneciente a Ker g^4 - Ker g^3, por ejemplo, $b_4 = (1, 0, 0, 0, 0)$, los restantes elementos de esta cadena serán: $b_3 = g(b_4) = (0, 1, 0, 0, -1)$, $b_2 = g(b_3) = (0, 1, 0, -1, 0)$ y $b_1 = g(b_2) = (0, 1, -1, 0, 0)$ (éste último pertenece a Ker g);

la otra cadena, ya que $q_1 = 1$, se obtendrá escogiendo como a_1 cualquier vector de Ker g que sea linealmente independiente de los b's, por ejemplo, $a_1 = (1, -1, 0, 0, 0)$ ■

Otro procedimiento para encontrar **bases de cadenas** consiste en construir dichas cadenas a partir de una base de vectores propios que se toman como inicio de las respectivas cadenas, localizando los restantes vectores como soluciones de las ecuaciones respectivas $g(v_i) = v_{i-1}$. Naturalmente, previamente es preciso realizar la partición de multiplicidades para saber de antemano la longitud de todas las cadenas.

Para problemas habituales, el costo computacional de ambos procedimientos es comparable.

1.6 La matriz de Jordan

Evidentemente, cualquier endomorfismo f no verifica la condición del teorema anterior ($f^m = 0$), sin embargo, asociado a cada valor propio de un endomorfismo se puede definir cierto endomorfismo que cumple la mencionada condición. Esto se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 10 **(de Jordan**)*.– Sea $f \in End\ V$ un endomorfismo tal que*

$$p_f(x) = (x - t_1)^{m_1} (x - t_2)^{m_2} \ldots (x - t_r)^{m_r}.$$

Entonces, existe una base de V respecto de la cual f tiene como matriz coordenada

$$J = diag.\ bloq.\ (A_1, \ldots, A_r)$$

siendo cada A_i de la forma

$$A_i = diag.\ bloq.\ (J_i^1, \ldots, J_i^{p_i})\ ,\ J_i^k = \begin{bmatrix} t_i & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & t_i \end{bmatrix} \quad ó\ J_i^k = (t_i)$$

estando el número de los bloques J_i^k y su tamaño para cada i determinados por f

La matriz J se denomina **matriz ó forma canónica de Jordan** del endomorfismo f. Las submatrices J_i^k se denominan **bloques de Jordan** del endomorfismo.

Demostr.: Según el teorema 4 , $V = \oplus N(t_i, m_i)$.

Para cada i, se construye el endomorfismo $g_i = (f - t_i\, id_V)|_{N(t_i,m_i)}$, restricción de $f - t_i\, id_V$ al subespacio $N(t_i, m_i)$ que, evidentemente, verifica; $g_i^{m_i} = 0$. Por lo tanto, según la proposición anterior, se puede encontrar (por los procedimientos mencionados o cualquier otro alternativo) una base de cadenas de $N(t_i, m_i)$. La unión de las r bases de cadenas es una base de V respecto de la cual la matriz coordenada de f es la J del enunciado.

En efecto, es suficiente observar que para la i-ésima cadena, por ejemplo, $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, se verifica:

$$g_i(a_1) = 0, \quad g_i(a_2) = a_1, \quad g_i(a_3) = a_2, \quad g_i(a_4) = a_3$$

es decir,

$$f(a_1) = t_i\, a_1, \quad f(a_2) = a_1 + t_i\, a_2, \quad f(a_3) = a_2 + t_i\, a_3, \quad f(a_4) = a_3 + t_i\, a_4$$

por lo que el bloque correspondiente a esta cadena será

$$\begin{bmatrix} t_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t_i \end{bmatrix} \blacksquare$$

Ejemplo 11 *.– Sea $f \in End\ R^3$ definido por su ecuación matricial $Y = A\,X$*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

encontrar la matriz de Jordan y una base correspondiente.

Solución

Polinomio característico: $p_f(x) = x\,(x-1)^2$

Valores propios y multiplicidades: $t_1 = 0, m_1 = 1; t_2 = 1, m_2 = 2$

Descomposición del espacio vectorial: $\mathbb{R}^3 = N(0,1) \oplus N(1,2)$

Para $t_1 = 0$:

Partición de multiplicidades

$p_1 = 1 = q_1 \quad \Rightarrow$ un bloque de orden 1

Núcleo: $N(0,1) = \text{Ker }(f - 0\, id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}\{v_1\}$, $v_1 = (1,-1,0)$

la cadena asociada a este bloque está constituida por v_1 solamente.

Para $t_2 = 1$: $g_2 = f - id_{\mathbb{R}^3}$

Partición de multiplicidades

$\text{Ker } g_2 = \text{Ker }(f - id_{R^3}) = \{X; (A - I)\, X = 0\} = \mathbb{R}\{(1,-1,-1)\} \quad \Rightarrow p_1 = 1$

$\text{Ker } g_2^2 = \text{Ker }(f - id_{R^3})^2 = \{X; (A - I)^2\, X = 0\} = R\{(0,1,0),(1,0,-1)\} \quad \Rightarrow p_2 = 2 - 1 = 1$

por lo tanto,

$q_1 = p_1 - p_2 = 0$

$q_2 = p_2 = 1 \quad \Rightarrow$ un bloque de orden 2

Base de cadena (una cadena de 2 vectores, ya que $q_2 = 1$): $v_3 \in N(1,2) - N(1,1)$, por ejemplo, $v_3 = (0,1,0)$ y $v_2 = g(v_3) = f(v_3) - v_3$, la cadena asociada a este bloque está constituida por v_2, v_3

Base(de cadenas) de Jordan: $\{v_1, v_2, v_3\}$

Matriz de Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz del cambio de base:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación: $A\,P = P\,J$. ■

1.7 Consecuencias y aplicaciones

Teorema 12 *(***Hamilton-Cayley***).– Sea $A \in M_K(n)$ cuyo polinomio característico es*

$$p_A(x) = (x - t_1)^{m_1}\,(x - t_2)^{m_2} \dots (x - t_r)^{m_r}.$$

Entonces, $p_A(A) = 0 \in M_K(n)$

Demostr.: Existe una matriz regular P tal que $J = P^{-1}\,A\,P$ es la matriz de Jordan que, como se ha indicado, es diagonal por bloques de Jordan J_i^k. Estos bloques verifican:

$$(J_i^k - t_i\, I)^{m_i} = 0\,,$$

ya que son bloques correspondientes a cadenas de $N(t_i, m_i)$. Por lo tanto,

$$p_J(J) = det(J - t\,I)|_{t=J} = 0$$

y, en consecuencia,

$$p_A(A) = P\, p_J(J)\, P^{-1} = 0 \;\blacksquare$$

Como consecuencia, se puede calcular A^n y A^{-1} de una forma más sencilla que la conocida hasta ahora.

Consecuencia 13 .– *Si* $A \in M_K(n)$ *cuyo polinomio característico es*

$$p_A(x) = x^n + a_{n-1}\, t^{n-1} + \ldots + a_0$$

entonces, $A^n = -a_0\, I - a_1\, A - \ldots - a_{n-1}\, A^{n-1}$

Consecuencia 14 .– *Si* $A \in M_K(n)$ *cuyo polinomio característico es*

$$p_A(x) = x^n + a_{n-1}\, t^{n-1} + \ldots + a_0$$

entonces, $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}\,(a_1\, I + a_2\, A + \ldots + a_{n-1}\, A^{n-2} + A^{n-1})$

En muchas ocasiones el trabajo a realizar para localizar la forma de Jordan y la base correspondiente puede reducirse teniendo en cuenta los resultados obtenidos. Por ejemplo, vease el ejercicio siguiente.

Ejercicio. Sea el endomorfismo f del que se conocen las imágenes de los vectores de cierta base $\{v_i\}$: $f(v_1) = (2,0,0,0)$, $f(v_2) = (2,-1,0,0)$, $f(v_3) = (0,2,-1,0)$, $f(v_4) = (0,0,0,-1)$. Encontrar la forma canónica de Jordan y una base correspondiente.

Solución La ecuación matricial del endomorfismo será $Y = A\,X$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & & \\ & -1 & 2 & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

Como A es triangular superior, sus valores propios y multiplicidades son: $t_1 = -1, m_1 = 3; t_2 = 2, m_2 = 1$

Obsérvese que el subespacio propio $S(-1) = R\{(0,0,0,1),(-2,3,0,0)\}$, por lo tanto, $p_1 = \dim S(-1) = 2$, es decir, asociados a este valor propio habrá dos bloques de Jordan, que forzosamente serán de orden uno y orden dos; el bloque asociado al otro valor propio será de orden 1. En consecuencia, la foma de Jordan será:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

Como Ker $(f + id_V)^2 = R\{(0,0,0,1),(-2,3,0,0),(-4,0,9,0)\}$, un vector de la cadena asociada al primer bloque de Jordan será, por ejemplo, $v_2 = (-4,0,9,0)$, y el otro, $v_1 = (f + id_V)(v_2) = (-12,18,0,0)$. La base de cadenas se completa con $v_3 \in$ Ker $(f + id_V)$, por ejemplo, $v_3 =$

$(0,0,0,1)$ y $v_4 \in \text{Ker}\,(f - 2\,id_V)$, por ejemplo, $v_4 = (1,0,0,0)$. La matriz del cambio a la base de Jordan será:

$$P = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 0 & 1 \\ 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Facilmente se comprueba que: $A\,P = P\,J$. ■

1.8 Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales

Una aplicación práctica de lo estudiado en los párrafos precedentes es la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. El problema es encontrar una función vectorial $x(t)$ que satisfaga la ecuación diferencial:

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = A\,x(t),$$

siendo A una matriz dada.

1.8.1 Primer procedimiento

Un procedimiento para la resolución es pasar a la base de Jordan, en la que el problema se simplifica sensiblemente y, finalmente, deshacer el cambio.

A continuación se desarrolla el proceso para el caso,

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ -0.18 & 0.2 \end{bmatrix}$$

En primer lugar, se encuentran la matriz de Jordan y una base correspondiente.

Polinomio característico: $p_A(x) = (t - (-0.1))^2$

Valores propios y multiplicidades: $t_1 = -0.1, m_1 = 2$

$S(-0.1) = R\{(5,3)\}$, luego, $p_1 = n_1 = 1$ y solo hay un bloque de Jordan que será de orden 2

Matriz de Jordan:

$$J = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Matriz de cambio a la base de Jordan:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Cambio a la base de Jordan. Llamando y al vector x respecto de la base de Jordan, la relación existente entre ambos es: $x = P\,y$. Con este cambio, el sistema diferencial inicial se transforma en el siguiente:

$$y' = P^{-1}\,A\,P\,y = J\,y$$

que puede ser resuelto fácilmente empezando por la segunda componente, obteniéndose:

$$\begin{aligned} y_2 &= c_2\,e^{-t/10} \\ y_1 &= c_1\,e^{-t/10} + c_2\,t\,e^{-t/10} \end{aligned} \tag{3}$$

Deshaciendo el cambio, se obtiene la solución buscada $x = P\,y$ en función de las dos constantes de integración:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1\,5e^{-t/10} + c_2\,te^{-t/10} \\ x_2(t) &= c_1\,3e^{-t/10} + c_2\,(10+3t)\,e^{-t/10} \end{aligned} \tag{4}$$

1.8.2 Segundo procedimiento

Buscar la solución del sistema lineal como: $X = e^{tA}\,C$.

Teniendo en cuenta que la matriz A es semejante a su forma de Jordan, es decir, $A = P\,J\,P^{-1}$, siendo P la matriz del cambio, bastará encontrar la matriz de Jordan J y la matriz del cambio P. Además, como $J = D + N$, con D matriz diagonal y N matriz nilpotente, resulta:

$$e^{t\,A} = e^{P\,t\,J\,P^{-1}} = P\,e^{t\,J}\,P^{-1} = P\,e^{t\,(D+N)}\,P^{-1} = P\,e^{t\,D}\,e^{t\,N}\,P^{-1} =$$

$$= P\,e^{t\,D}\,(I + t\,N + \frac{t^2}{2}\,N^2 + ... + \frac{t^k}{k!}\,N^k)\,P^{-1}, \text{ con } k \leq \dim \text{V}$$

En particular, en este ejemplo,

$$J = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \Longrightarrow D = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz de cambio a la base de Jordan y su inversa:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -3/50 & 1/10 \end{bmatrix}$$

Así que

$$e^{t\,J} = e^{t\,D}\,(I + t\,N) = e^{t\,D}\,(I + t\,N) = e^{t\,D}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t/10} & te^{t/10} \\ 0 & e^{t/10} \end{bmatrix} = e^{t/10}\begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 2\,t & 1 \end{bmatrix}$$

Y, por lo tanto,

$$X = e^{t\,A}\,C = P\,e^{t\,J}\,P^{-1}\,C = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\,e^{-t/10}\,(c_1(10-3t) + 5c_2 t) \\ \frac{1}{50}\,e^{-t/10}\,(-9c_1 t + 5c_2(10+3t)) \end{bmatrix},$$

que coincide con la solución hallada anteriormente si se sustituyen aquellas constantes por $5c_1$ y $3c_1 + 10c_2$, respectivamente.

2.1 Introducción

Puesto que disponemos ya de un resultado que nos permite decidir cuándo una matriz es diagonalizable, es fácil encontrar matrices que no lo son. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1 = 3-4\lambda+\lambda^2+1 = (\lambda-2)^2$$

y por tanto tiene un único autovalor con multiplicidad algebraica 2, sin embargo, la multiplicidad geométrica de este autovalor es 1 con lo que no es diagonalizable. Nos planteamos si es posible encontrar una matriz semejante con A que sea lo más parecida posible a una matriz diagonal, en concreto a una matriz de la forma

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

de la que podemos calcular sus potencias por la fórmula

$$J^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

En primer lugar, si ambas son semejantes, entonces tienen los mismos autovalores y por tanto debe ser $a = 2$. Ahora, si llamamos f al endomorfismo determinado por estas matrices, la base $B = \{v_1, v_2\}$ tal que $\mathfrak{M}_B(f) = J$ debe verificar:

1. $f(v_1) = 2v_1 = (2,0)_B$, es decir, v_1 es un autovector asociado al autovalor 2.
2. $f(v_2) = v_1 + 2v_2 = (1,2)_B$

Para calcular un posible v_1, imponemos la condición requerida, es decir, $v_1 = (x, y)$ donde

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y debe ser $x + y = 0$, por ejemplo podemos tomar $v_1 = (1, -1)$.
Para calcular v_2, observemos que la condición requerida se puede escribir como

$$f(v_2) - 2v_2 = v_1$$

o bien, si llamamos $v_2 = (x, y)$, entonces

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y resolviendo el sistema queda una única ecuación que es

$$x + y = 1$$

con lo que podemos tomar, por ejemplo, $v_2 = (1,0)$. Tenemos así la base deseada: $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ respecto de la cual la matriz asociada a f es J. La matriz J se llama la **forma canónica de Jordan** de A.

Figure 1: Extraido de Merino, L. y Santos, E.