Soluciones

1 a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 b) Ker f $= \{x | A\,x = 0\} = \mathbb{R}\{(1,1,0,-1)\}$, dim Ker f $= 1$

Im f $=$ f$(\mathbb{R}[x]) = \mathbb{R}\{f(1), f(x), f(x^2), f(x^3)\} = \mathbb{R}\{f(1), f(x), f(x^2)\}$, dim Im f $= 3$

No existe $f^{-1}(1,0,0,0)$, ya que el sistema $A\,x = (1,0,0,0)^T$ es incompatible.

1 c) Es posible, ya que rg f = rg A = 3, luego A y la matriz dada son equivalentes. La bases solicitadas se consiguen realizando operaciones elementales con las filas y columnas de A, es decir, cambios de base en el espacio final y en el inicial, hasta llegar a la dada. Concretamente, la sucesión de operaciones elementales definidas por las matrices siguientes:

$$Q^{-1}\,A\,P = P_{43}(1)\,P_{42}(-1)\,Q_2(-1)\,P_{21}(-1)\,P_{13}\,A\,P_{14}(-1)\,P_{24}(-1)$$

en donde P y Q representan las matrices de cambio de la base canónica a la nueva

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir, las columnas de estas matrices componen las nuevas bases.

2 a) La matriz coordenada de q respecto de la mencionada base conjugada es

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Y respecto de la base canónica será

$$A = P^T\,D\,P,$$

siendo P la matriz que define el cambio de base a la de vectores conjugados, es decir,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que

$$A = \begin{pmatrix} 29 & 19 & 4 \\ 19 & 51 & 20 \\ 4 & 20 & 8 \end{pmatrix}$$

2 b) La forma q es indefinida, pues a partir de D se sabe que rg q = 3 y sg q = 2

2 c) No es posible, pues rg B = 3 y sg B = 1, es decir, no es congruente con la D anterior.

3)

$$f(v) = \lambda\,(\alpha_1\,v_1 + ... + \alpha_n\,v_n) = \lambda\,\alpha_1\,v_1 + ... + \lambda alpha_n\,v_n),$$

y también,

$$f(v) = \alpha_1\,\lambda_1\,v_1 + ... + \alpha_n\,\lambda_n\,v_n$$

Como la familia $\{v_j\}$ es una base, la igualdad de las dos combinaciones lineales exige que todos los λ's sean iguales.

4 a) $F(p,q)$ es producto escalar por ser bilineal, simétrica y definida positiva. Las dos primeras afirmaciones son inmediatas; la segunda se cumple, ya que

$$F(p(x), p(x)) = p(0)^2 + p(1)^2 + p'(0)^2 + p'(1)^2$$

es siempre positiva, salvo cuando $p(0) = p(1) = p'(0) = p'(1) = 0$, lo que implica que el polinomio es idénticamente nulo.

4 b) $q(x) \in S \Longrightarrow q(x) = t_1\,(x - x^3) + t_2\,(x^2 - x^3)$

Luego, un polinomio $p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3$ ortogonal a S y unitario ha de cumplir:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot (x - x^3) = 0 &= b_1 - 2b_1 - 4b_2 - 6b_3 \\ p(x) \cdot (x^2 - x^3) = 0 &= b_1 + 2b_2 + 3b_3 \\ p(x) \cdot p(x) = 1 &= b_0^2 + (b_0 + b_1 + b_2 + b_3)^2 + b_1^2 + (b_1 + 2b_2 + 3b_3)^2 \end{aligned}$$

Tomando, en particular, $b_3 = 0$, resulta: $p(x) = 1$ es uno de los buscados.

4 c) Si. Se prueba igual que en el apartado a), o bien, observando que éste es una restricción del del apartado a).