Soluciones

1.- a) Mediante eliminación gaussiana se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} t & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & r & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ t & -1 & 0 & 1 \\ 0 & r & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1+2t & t & 1+2t \\ 0 & r & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & r & 1 & 1 \\ 0 & -1+2t & t & 1+2t \end{bmatrix} \sim \text{si r} \neq 0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & r & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2t+rt & (1-2t+rt)+(1+t)r \end{bmatrix}$$

Como consecuencia:
si $r \neq 0$ y $1-2t+rt \neq 0$, rg A $= 3 \Longrightarrow$ sistema compatible determinado
si $r \neq 0$ y $1-2t+rt = 0$, rg A $= 2$; si, además, $1+t \neq 0$, rg $\bar{A} = 3 \Longrightarrow$ sistema incompatible
si $r \neq 0$ y $1-2t+rt = 0$, rg A $= 2$; si, además, $1+t = 0$, rg $\bar{A} = 2 \Longrightarrow$ sistema compatible indetarminado
si $r = 0$ y $1-2t = 0$, rg A $= 2$ y rg $\bar{A} = 3 \Longrightarrow$ sistema incompatible
si $r = 0$ y $1-2t \neq 0$, rg A $= 3$ y rg $\bar{A} = 3 \Longrightarrow$ sistema compatible determinado.

1.- b)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5/3 & 1 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

1.- c)
```
bb={1,2,1};    z=Inverse[ele].bb = (1, 7/3, -2/5)
xx=Inverse[u].z = (1, 2, -1)
ab.xx==bb
     True

bb={0,1,0};   z=Inverse[ele].bb  = (0, 1, -3/5)
xx=Inverse[u].z   = (1/2, 3/2, - 3/2)
ab.xx==bb
    True
```

2.- a) A define un cambio de base porque tiene rango 3, máximo e igual a la dimensión
B no define un cambio de base porque tiene rango 2, que no es máximo.

2.- b) Para ser matrices del mismo endomorfismo deberían ser semejantes, lo que lleva consigo tener el mismo rango (también el mismo polinomio característico, etc.).

2.- c) La ecuación del endomorfismo en la base conocida será: Y = B X. La matriz del cambio de dicha base a otra es A, por lo que la ecuación del cambio de coordenadas es: $X = A\,\bar{X}$, siendo X las antiguas coordenadas de un vector genérico. Sustituyendo en la ecuación anterior resulta: $\bar{Y}\,A = B\,A\,\bar{X}$, es decir, $\bar{Y} = A^{-1}\,B\,A\,\bar{X}$. En consecuencia, la matriz C del endomorfismo en la nueva base será:

$$C = A^{-1}\,B\,A$$

3.- a) Calculemos las multiplicidades algebraica y geométrica de los dos valores propios:

$$dimN(-4,1) = 4 - rg(C-(-4)I) = 4-2 = 2, \quad dimN(-4,2) = 4 - rg(C-(-4)I)^2 = 4-2 = 2$$

$$dimN(4,1) = 4 - rg(C-(4)I) = 4-3 = 1, \quad dimN(4,2) = 4 - rg(C-(4)I)^2 = 4-2 = 2$$

Por lo tanto, $m_1 = 2, m_2 = 2$ y, además, $n_1 = 2, n_2 = 1$.

En consecuencia, no es diagonalizable.

3.- b) Dado que la suma de las dimensiones de los dos subespacios no es igual a n = 4, no son suplementarios.

3.- c) Una base de Jordan es una base de cadenas compuesta por una cadena de dos elementos, $\{v_1, v_2\}$ asociada al valor propio $t_2 = 4$ y dos cadenas, v_3 y v_4, de un solo elemento asociadas al valor propio $t_1 = -4$. Así que, $v_2 \in N(4,2) - N(4,1)$, $v_1 = (C - 4I)\, v_2$; por ejemplo, ya que :

$$N(4,2) = \mathbb{R}\{(1,0,1,0),(1,1,0,1)\} \quad \mathrm{y} N(-4,1) = \mathbb{R}\{(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$$

tomamos, $v_2 = (1,0,1,0) \Longrightarrow v_1 = (C-4I)\,v_2 = (1,1,0,1)$ y $v_3 = (0,1,0,0), v_4 = (0,0,0,1)$

3.- d) Teniendo en cuenta que la matriz de cambio de base a la base de Jordan y la matriz de Jordan son, respectivamente:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

y que

$$A = P\,J\,P^{-1} \Longrightarrow A^k = P\,J^k\,P^{-1} = P\,(D+N)^k\,P^{-1} = P\,(D^k + \begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} D^{k-1}\,N)\,P^{-1} = P\,D^{k-1}\,(D+k\,N)\,P^{-1}$$

Por lo tanto,

$$A^{14} = P\,J^{14}\,P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 4 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

4.- a) Como la integración es una forma lineal y el orden de los factores no modifica la integral, podemos afirmar que se trata de una forma bilineal simétrica. Además,

$$F(p(x), p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)^2\, dx \geq 0$$

Luego es definida positiva y, por lo tnato, define un producto escalar en $\mathbb{R}_3[x]$

4.- b)

$$\|p(x)\|^2 = F(p(x),p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)^2\, dx = \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + 4x^3 + x^4 - 4x^5 + 4x6)\, dx =$$

$$(x - 2x^3/3 + 4x^4/4 + x^5/5 - 4x^6/6 + 4x^7/7)\Big|_{-1}^{1} = 1-2/3+1/5+4/7+1-2/3+1/5+4/7 = \frac{232}{105}$$

4.- c) Sea $p_2(x) = a + b\,x + c\,x^2$. Una base de $\mathbb{R}_1[x]$ es $\{1, x\}$. Imponiendo las dos condiciones de ortogonalidad, resulta:

$$F(p_2(x), 1) = \int_{-1}^{1} p_2(x)\, dx = 2(a + c/3) = 0, \quad F(p_2(x), x) = \int_{-1}^{1} x\, p_2(x)\, dx = 2(b/3) = 0,$$

que proporciona $p_2(x) = -3 + x^2$, tomando a = -3, por ejemplo.

Evidentemente, la familia $\{1, x, p_2(x)\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$

5.- a) A no es matriz coordenada de F porque A es simétrica y F no lo es. Su matriz coordenada en una base conocida sería:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En cambio, A sí es coordenada de la forma cuadrática asociada a F ya que

$$A = \frac{1}{2}\,(B + B^T)$$

5.- b) Como se observa, después de realizar varias transformaciones de congruencia, la matriz diagonal obtenida tiene signatura $\text{sg}(A) = (3, 0)$, es decir, todos los elementos de la diagonal son positivos, luego es definida positiva.

5.- c) La matriz P ha sido obtenida mediante eliminación gaussiana, luego solo es una matriz regular, no necesariamente ortogonal.

5.- c) La matriz Q ha sido obtenida mediante operaciones de congruencia y como la matriz coordenada de la forma cuadrática es diagonal, pero no la unidad, la nueva base será ortogonal y no ortonormada, por lo que como las filas de Q definen dicha base, la afirmación NO es correcta.