ALGEBRA (Ingeniería Industrial y Telecomunicación)
Grupo rotado

14 de septiembre de 2009 Examen segunda convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1.- Se considera el sistema A X = B, siendo

$$A = \begin{matrix} t & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & r & 1 \end{matrix} \quad , \quad B = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

a) Discutir el sistema según los valores de r y t.
b) Obtener la factorización L U de la matriz A en el caso de que r = 1 y t = 3
c) En el caso de que r = 1 y t = 3, resolver el sistema propuesto utilizando la factorización L U. Sustituir el vector B por B = (0,1,0) y volver a resolver el nuevo sistema.

2.- Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) ¿Definen cambios de base en $\mathbb{R}^3$?.
b) ¿Pueden ser ambas matriz coordenada del mismo endomorfismo h. Razónalo.
c) Suponiendo que la matriz B es la matriz coordenada de un endomorfismo h en cierta base y que A es la matriz del cambio de dicha base a otra, encuentra la matriz coordenada de h en la nueva base.

3.- Sea el endomorfimo $f \in \mathbb{R}^3$ que tiene como matriz coordenada respecto de una base conocida la matriz

$$C = \begin{bmatrix} -10 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 16 & -16 & 12 & -8 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Se sabe que los únicos valores propios de C son $t_1 = -4, t_2 = 4$
a) Estudia la diagonalizabilidad de f.
b) Prueba si N(-4,2) y N(4,1) son subespacios supementarios.
c) Localiza una base (de Jordan) para la matriz de Jordan del endomorfismo f.

4.- Se considera la siguiente forma bilineal en $\mathbb{R}_3[x]$

$$F(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

a) Prueba que $F(x, y)$ es un producto escalar en $\mathbb{R}_3[x]$
b) Calcula la norma de $p(x) = 1 - x^2 + 2x^3$
c) Encuentra un polinomio de grado 2, $P_2(x)$, ortogonal al subespacio $\mathbb{R}_1[x]$ y prueba que la familia $\{1, x, P_2(x)\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

5.- Se considera la forma cuadrática asociada a la forma bilineal F siguiente:

$$F(x,y) = 3\,x_1y_1 - 2\,x_1y_2 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_3$$

Se realizan las siguientes operaciones con MATLAB:

```
>>a
     3    -1     0
    -1     2     1
     0     1     1
>>ai = [a, eye(3)]
     3    -1     0     1     0     0
    -1     2     1     0     1     0
     0     1     1     0     0     1
>>rref(ai)
  1            0            0           1/2          1/2          -1/2
  0            1            0           1/2          3/2          -3/2
  0            0            1          -1/2         -3/2           5/2
>>p=ans(:,4:6)
 1/2           1/2          -1/2
 1/2           3/2          -3/2
  -1/2          -3/2           5/2
>>>u=ai;
>> u(2,:)=u(2,:)+u(1,:)/3
 u(1,2)=0
u =
            3            0            0            1            0            0
            0          5/3            1          1/3            1            0
            0            1            1            0            0            1

>> u(3,:)=u(3,:)-u(2,:)*3/5
u(2,3)=0

u =
            3            0            0            1          0            0
            0          5/3           0          1/3          1            0
            0            0          2/5        -1/5         -3/5            1
>> q = u(:,4:6)
             1          0            0
           1/3          1            0
            -1/5       -3/5            1
```

Razona, sin hacer otros cálculos, la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:
a) A es la matriz coordenada de la forma bilineal y de la cuadrática respecto de la base canónica.
b) La forma cuadrática define un producto escalar.
c) Las filas de la matriz P componen una base ortonormada.
d) Las filas de la matriz Q componen una base ortonormada.