ALGEBRA (Ingeniería Industrial y telecomunicación)
Grupo rotado

19 de junio de 2009 Examen primera convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1.- Se considera el grupo $\mathbb{Z}_8$ de las clases residuales módulo 8

a) Encuentra, si es posible, un subgrupo que no sea normal y otro que lo sea.

b) Encuentra el subgrupo de $\mathbb{Z}_8$ engendrado por $\{2, 4\}$ y el engendrado por $\{3\}$

c) Localiza, si los hay, los divisores de cero del anillo $(\mathbb{Z}_8, +, \bullet)$

2.- Se consideran las matrices

```
D =
    -2     0     0
     0    -2     0
     0     0    -1
A =
    -12           14            -8
     14          -18            10
     -8           10            -6
```

La matriz A es la matriz coordenada de una cierta aplicación h.

a) Transformar A en D mediante multiplicación por matrices adecuadas.

b) Encuentra una base $\mathcal{B}$ en la que la matriz coordenada de h sea D.

c) Encuentra las coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ anterior del vector $\boldsymbol{v} = (1, 1, 1)$

3.- Sea el endomorfimo $f \in \mathbb{R}^3$ que tiene como matriz coordenada respecto de una base conocida la matriz

$$C = \begin{bmatrix} -4+r & -r & 0 \\ r & -4-r & 0 \\ -8+r+s & -r-s & 4 \end{bmatrix}$$

a) Estudia la diagonalizabilidad de f según los valores de r y de s.

b) Prueba que, en el caso r = 1, s = 0, N(-4,2) y N(4,1) son subespacios supementarios.

c) En el caso r = 1, s = 0, localiza una base (de Jordan) para la matriz de Jordan del endomorfismo f.

d) En el caso r = 1, s = 0, halla A^{19}.

4.- Sea $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación definida respecto de una base ortonormada mediante:

$$\begin{aligned} 3y_1 &= -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 3y_2 &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3y_3 &= 2x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

siendo $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\quad y = (y_1, y_2, y_3)$ un vector genérico y su transformado.

a) Prueba que que se trata de una transformación ortogonal.

b) Prueba que si t_1 es un valor propio de h entonces tiene módulo 1

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

4.- Sean los subespacios S y T de $\mathbb{R}^4$, $S = \mathbb{R}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $T = \mathbb{R}\{v_5, v_6, v_7\}$, siendo los vectores $v_1 = (1, 1, -1, 1), v_2 = (2, 2, -2, 2), v_3 = (-1, -1, 1, -1), v_4 = (1, -1, 1, -1), v_5 = (2, 1, 0, 1), v_6 = (8, 5, -2, 5), v_7 = (2, 2, 0, 0)$. Se realizan las siguientes operaciones con MATLAB:

```
st = [v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7]
    1    2   -1    1    2    8    2
    1    2   -1   -1    1    5    2
   -1   -2    1    1    0   -2    0
    1    2   -1   -1    1    5    0
rref(st)
    1    2   -1    0    0    2    0
    0    0    0    1    0    0    0
    0    0    0    0    1    3    0
    0    0    0    0    0    0    1
```

Razona, sin hacer otros cálculos, la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:
a) $S \oplus T = \mathbb{R}^4$
b) Una base de S + T es la compuesta por los vectores v_1, v_2, v_5, v_6
c) Una base de S + T es la unión de una base de S y otra de T
d) La intesección de S y T es el subespacio nulo.