ALGEBRA (Ingeniería Industrial) Grupo virado

22 de junio de 2006 Examen primera convocatoria

Soluciones

1.- a) El conjunto $C = \{-1, +i, -1, -i\}$ con respecto de la suma no posee estructura de grupo, ya que no es estable para la suma (por ejemplo, +i -i = 0, que no pertenece a C). En consecuencia, no posee subgrupos, ni subgrupos invariantes. Sí sería grupo abeliano con respecto a la multiplicación. Todos sus subgrupos serían invariantes, ya que la operación es conmutativa.

1.- b) Al no ser grupo con respecto a la suma, no puede ser anillo ni dominio de integridad (anillo con unidad sin divisores de cero). Sin embargo, como la multiplicación es operación interna, podemos ver que no existen divisores de cero, es decir, si a*b = 0 ==¿ a = 0 ó b = 0.

2.- a) Es lo mismo que preguntar para qué valores de λ el sistema es compatible, es decir, $rgA = rg\bar{A}$.

Haciendo eliminación gaussiana por filas, resulta que $rgA = rg\bar{A}$ solo para $\lambda = 12\,(4-\sqrt{14}), \lambda = 12\,(4+\sqrt{14})$

2.- b) Los casos $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ no corresponden a los anteriores, es decir, que en este caso las cuatro columnas son linealmente independientes, por lo tanto, cada dos de ellas generan un espacio de dimensión 2, y la intersección será el subespacio nulo.

3.- a) Ker $f = \mathbb{R}\{(1,0,1,1)\}$

3.- b) Ker $(f-1)^3 = \mathbb{R}\{(-1,0,0,1),(1,0,1,0),(0,1,0,0)\}$

3.- c) rg $\{(1,0,1,1),(-1,0,0,1),(1,0,1,0),(0,1,0,0)\} = 4$, por lo que son una base de $\mathbb{R}^4$.

La matriz coordenada de f en esta base es la que tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores respecto de ella misma, o también la matriz semejante a la dada obtenida por la relación de semejanza definida por la matriz de cambio P que tiene por columnas las coordenadas de los vectores anteriores. Es decir,

$$B = P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No tiene por qué ser la de Jordan, pues la base no es obligatoriamente de cadenas, aunque sí es la unión de bases de los subespacios propios generalizados.

3.- d) El rg $(A - I) = 3$, por lo que la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda = 1$ es 1 (la algebraica es 3, como se deduce del apartado 3. b). En consecuencia, la matriz de Jordan será:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- e)

$$P_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rápidamente se comprueba que $A\,P_J = P_J\,J$

4.- a) Q es una aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ que verifica:

$$Q(t\,x) = f_1(t\,x).f_2(t\,x) = t\,f_1(t\,x).t\,f_2(x) = t^2\,f_1(t\,x).f_2(x) = t^2\,Q(x)$$

4.- b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & -2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- c) La forma polar de Q es la forma bilineal única que es simétrica definida por

$$F(x,y) = 1/2\,[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)] = X^T\,A\,Y$$

4.- d) Primer método.- Basta realizar operaciones elementales de congruencia sobre la matriz A hasta transformarla en una diagonal; la nueva base estará constituida por los vectores fila de la matriz de transformación, que serán ortogonales, ya que la matriz coordenada de Q en ella es diagonal.

$$P\,A\,P^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -25/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Segundo método.- Encontrar una base de vectores conjugados respecto de la forma cuadrática Q.

Para ello: 1) tomamos $v_1 = (0,0,1)$ que cumple $Q(v_1) = 1 \neq 0$; 2) escogemos v_2 ortogonal a v_1, es decir, $v_1^T\,A\,v_2 = 0 \Longrightarrow v_2 = (1,-1,0)$ que cumple $Q(v_2) = -4 \neq 0$; 3); 3) escogemos v_3 ortogonal a v_1 y v_2, es decir, $v_1^T\,A\,v_3 = 0$ y $v_2^T\,A\,v_3 = 0 \Longrightarrow v_3 = (3,1,-2)$

Tercer método.- Dado que la matriz de Q es simétrica, los valores propios son reales y los subespacios fundamentales son ortogonales; así que basta encontrar una base de vectores propios de A.