ALGEBRA (Ingeniería Industrial) Grupo virado

22 de junio de 2006 Examen primera convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1.- Se considera el conjunto C de todas las raíces cuartas de 1.

a) ¿Es C grupo abeliano con respecto a la suma?. Encuentra un subgrupo S. ¿Es S subgrupo invariante de C?; justifícalo.

b) ¿Es C con respecto a la suma y al producto dominio de integridad?. Si hay divisores de cero, dí cuáles son.

2.- Sea el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y+z & = & -\lambda \\ y-z & = & 2 \\ 2x-y & = & 1 \\ x-y+\lambda z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) ¿Para qué valores de λ la columna de términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes?

b) Hallar la intersección de los subespacios S_1 engendrado por las dos primeras columnas de la matriz de coeficientes y S_2 engendrado por la tercera columna y la de términos independientes para el caso $\lambda = 1$ y para el caso $\lambda = -1$.

3.- En $\mathbb{R}^4$ se considera el endomorfismo $f \in \mathbb{R}^4$ cuya matriz coordenada respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra una base $\mathcal{B}_1$ del núcleo de f

b) Encuentra una base $\mathcal{B}_2$ del núcleo de $(A-I)^3$

c) Prueba que la unión $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ es una base de $\mathbb{R}^4$. Encuentra la matriz B coordenada de f respecto de la base $\mathcal{B}$de $\mathbb{R}^4$. ¿Es B la matriz de Jordan de f?; razónalo.

d) Calcula el rango de $A - I$. Escribe la matriz de Jordan de f.

e) Encuentra una base de Jordan de f.

4.- Se considera dos formas lineales $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y la aplicación

$$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$Q(x) = f_1(x) \,.\, f_2(x)$$

a) Probar que la aplicación Q es una forma cuadrática

b) Si f_1 y f_2 están definidas por

$$f_1(x) = x_1 + x_3 - x_2, \quad f_2(x) = 2x_2 + x_3$$

encontrar la matriz coordenada A de Q respecto de la base canónica

c) Hallar la forma bilineal F polar de Q

d) Encontar la matriz coordenada de F respecto de una base ortogonal.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

5.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$C\,X = D, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & t \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -t \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se realizan las siguientes operaciones con MATLAB sobre la matriz M ampliada del sistema anterior:

```
>> M=[C, D];   l = eye(4);
>>u=M
[  1,  1,  1, -t]
[  0,  1, -1,  2]
[  2, -1,  0,  1]
[  1, -1,  t,  0]
>> i=3;j=1;el=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-el*u(j,:)
u =
[    1,   -1,    t,    0]
[    0,    1,   -1,    2]
[    0,    1, -2*t,    1]
[    1,    1,    1,   -t]
>> i=4;j=1;el=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-el*u(j,:)
u =
[    1,   -1,    t,    0]
[    0,    1,   -1,    2]
[    0,    1, -2*t,    1]
[    0,    2,  1-t,   -t]
>> i=3;j=2;el=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-el*u(j,:)
u =
[      1,     -1,       t,      0]
[      0,      1,      -1,      2]
[      0,      0, -2*t+1,     -1]
[      0,      2,    1-t,     -t]
>> i=4;j=2;el=u(i,j)/u(j,j);u(i,:)=u(i,:)-el*u(j,:)
u =
[      1,     -1,       t,      0]
[      0,      1,      -1,      2]
[      0,      0, -2*t+1,     -1]
[      0,      0,    3-t,   -t-4]
```

A partir de estos cálculos, justifica la certeza o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) el sistema es incompatible si t = 1, y es compatible determinado si t = -1

b) si $t = 1$, para la matriz M no existe factorización L U

c) en el caso t = 1, escribe la matriz L que cumple M = L U

d) el producto L^{-1} U es parecido a M, ¿en que se diferencian?