Soluciones

1.- a) La tabla de la operación $+$ es tal que:
no contiene elementos no pertenecientes a H, luego es op. interna
en cada fila y columna solo aparece cada elemento una sola vez, luego está bien definida
hay una fila y una columna coincidentes con la fila de elemntos de H, luego tiene elemento neutro (el d)
en todas las filas y columnas aparece el elemento d una sola vez, luego cada elemento tiene un único opuesto
la tabla es simétrica, luego la operación es conmutativa.
Además, se comprueba la asociatividad, por ejemplo:

$$a + (b + c) = a + a = b, \quad (a + b) + c = c + c = b$$

Con la tabla de la operación $\bullet$ para H^* se ve que el elemnto d aparece entre los resultados, luego hay divisores de cero y, por lo tanto, H no es cuerpo.

1.- b) Divisores de cero $D = \{x \in H | x \bullet a = d, \text{ para algún } a \in H\}$. Por lo tanto, de la tabla de la operación $\bullet$ resulta que el único elemento de H^* que tiene divisores de cero es el b que cumple $b \bullet b = d$.

1.- c) En la tabla de la operación $+$ se comprueba que $4 \cdot y = d$, luego $4 \cdot y + c = c$. Y en la tabla de la operación $\bullet$ también se comprueba que no hay ningún elemento cuyo cuadrado sea igual a c.

2.- a) En primer lugar, observemos que, por ser f inyectiva, la imagen de un base es un sistema generador y libre de $\text{Im } f \subset \mathbb{R}^m$, luego $n \leq m$.

Ahora, notemos que la familia $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, ..., v_1 + ... + v_n\}$ es libre, pues

$$t_1 \, v_1 + t_2 \, (v_1 + v_2) + t_3 \, (v_1 + v_2 + v_3) + ... + t_n \, (v_1 + ... + v_n) = 0 \Longrightarrow t_j = 0, \forall j = 1, ..., n$$

En consecuencia, al ser f inyectiva, la imagen de cualquier familia libre es otra familia libre, en particular, la familia $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, ..., v_1 + ... + v_n\}$.

2.- b) Al ser un sistema libre, será base si la dimensión m coincide con n.

3.- a) Como $a_1, a_2 \in Ker(A - I) \iff f(a_1) = a_1, f(a_2) = a_2$, luego a_1 y a_2 son vectores propios de f asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$.

Además, $f(v) = a_1$, luego $f(a_1) - f(v) = f(a_1 - v) = (0, 0, 0)$, es decir, el vector $a_3 = a_1 - v = (1, -1, -1)$ es un vector propio de f asociado al valor propio $\lambda_2 = 0$.

3.- b) Ya que los valores propios de f con sus multiplicidades son:

$$\lambda_1 = 1, \quad m_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 0, \quad m_2 = 1,$$

y la familia $\{a_1, a_2, a_3\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$, los núcleos generalizados serán

$$N(1, 1) = N(1, 2) = \mathbb{R}\{a_1, a_2\}, \quad N(0, 1) = \mathbb{R}\{a_3\}$$

3.- c) La forma canónica de Jordan y la base de Jordan correspondiente serán , en consecuencia,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.- d)

$$A = P \, J \, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P\,J^n\,P^{-1}, \text{ pero } \quad J^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J,$$

así que: $A^n = A$.

4 A.- a) La matriz coordenada de la forma bilineal es

```
a =
[  5,  2, -1]
[  2,  1, -1]
[ -1, -1,  s],
```

comprobamos que es simétrica. Debe coincidir con la matriz coordenada de la forma cuadrática. Por lo tanto, diagonalizando por el método de congruencias, por ejemplo, llegamos a:

```
d = a =
[  5,  2, -1]
[  2,  1, -1]
[ -1, -1,  s],
>> i=2;  j=1;  d(i,:)=d(i,:)-d(j,:)/d(j,j)*d(i,j);
>> d(j,i)=0
d =
[    5,    0,   -1,    1,    0,    0]
[    0,  1/5, -3/5, -2/5,    1,    0]
[   -1,   -1,    s,    0,    0,    1]
>> i=3;  j=1;  d(i,:)=d(i,:)-d(j,:)/d(j,j)*d(i,j);
>> d(j,i)=0;
d =
[     5,     0,     0,     1,     0,     0]
[     0,   1/5,  -3/5,  -2/5,     1,     0]
[     0,  -3/5, s-1/5,   1/5,     0,     1]
>> i=3;j=2;d(i,:)=d(i,:)-d(j,:)/d(j,j)*d(i,j)
>> d(j,i)=0
d =
[    5,    0,    0,    1,    0,    0]
[    0,  1/5,    0, -2/5,    1,    0]
[    0,    0,  s-2,   -1,    3,    1]
```

En consecuencia, rg $A = 3$, si $s \neq 2$, y la signatura sg $A = 3$, si $s > 2$. Luego, la forma cuadrática será definida positiva para todo valor de $s > 2$. Si $s \leq 2$, la signatura, sg $A = 2$, luego no puede ser definida negativa para ningún valor de s.

4 A.- b)

$$w = u + \alpha\,v = (1-\alpha, 1+3\,\alpha, 1-\alpha)$$

Para que w y u sean ortogonales, se ha de cumplir que

$$F(u,w) = (1\;1\;1)\,A \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1+3\,\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix} = 0, \text{ es decir, } (6,2,2) \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1+3\,\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix} = 0 = 5-\alpha \Longrightarrow \alpha = 5$$

4 A.- c) $s = 4: \quad \|u\|^2 = Q(u) = u^T\,A\,u = 10 \Longrightarrow \|u\| = \sqrt{10}$
$s = 4: \quad \|v\|^2 = Q(v) = v^T\,A\,v = 2 \Longrightarrow \|v\| = \sqrt{2}$
$s = 2: \quad \|u\|^2 = Q(u) = u^T\,A\,u = 8 \Longrightarrow \|u\| = \sqrt{8}$
$s = 2: \quad \|v\|^2 = Q(v) = v^T\,A\,v = 0 \Longrightarrow \|v\| = \sqrt{0}$

La norma de v se anula porque Q no es definida positiva para $s = 2$ y, por tanto, Q no define un producto escalar.

4 B.- a) La matriz coordenada de la forma cuadrática es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando las siguientes operaciones elementales de congruencia resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 2 \\ 0 & 2 & 16/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices elementales que han actuado sobre las filas son:

$$P_{12}(1), \quad P_{21}(1/2), \quad P_{31}(-2/3), \quad P_{32}(4/3)$$

En consecuencia, rg $q = 3$ y sg $q = 2$, es decir, forma cuadrática indefinida.

4 B.- b) Es posible, pues es suficiente llegar en la forma del apartado anterior hasta la forma diagonal reducida de la q. Para ello, se realizan operaciones elementales de congruencia en la forma siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones elementales de congruencia resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la primera definida por la matriz elementales $Q_1(\sqrt{6})$ y la segunda por la matriz elemental $Q_2(\sqrt{3}/\sqrt{2})$

Así pues, la matriz del cambio de la base inicial a la de la diagonal reducida será la matriz transpuesta del producto de todas ellas, es decir,

$$P = P_{21}(1),\ P_{12}(1/2),\ P_{13}(-2/3),\ P_{23}(4/3)\, Q_1(\sqrt{6})\, Q_2(\sqrt{3}/\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{3}/4 & 0 \\ \sqrt{6} & 3\sqrt{3}/2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$