# Soluciones

1. Singular: $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, pues rg A = 2

   Hermítica: $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, o bien, $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2i \\ -2 & 0 & 2 \\ -2i & 2 & 2 \end{bmatrix}$, pues basta que sea simétrica compleja, es decir, $A = A^*$

   Hemisimétrica: no se puede construir, pues $A = -A^T$ y ya se tiene $a_{12} \neq -a_{21}$

   Diagonalizable: $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, pues cualquier matriz real simétrica es diagonalizable; si no fuera simétrica, debería tener la multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio iguales.

2. (a) Con las siguientes operaciones de congruencia: $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, se ve que el rg A = 2 y la sig A = 1, por lo tanto, es indefinida.

   (b) Como $v_1^T\, A\, v_1 = 6$, $v_1$ es no isótropo.
   $v_2 = (x, y, z)$ tal que $v_2 \,.\, v_1 = 0$, es decir, x = y + 2 z; tomemos $v_2 = (1, 1, 0)$, que es no isótropo, ya que $v_2^T\, A\, v_2 = -6$.
   $v_3 = (x, y, z)$ tal que $v_3 \,.\, v_1 = 0$ y $v_3 \,.\, v_2 = 0$, es decir, x = y + 2 z, z = 2 x + y, es decir, x = z, y = -z; tomemos $v_3 = (1, -1, 1)$, que resulta ser isótropo, ya que $v_3^T\, A\, v_3 = 0$

3. (a) $M = A\,B = \left[ \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \atop \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \right] \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \atop \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \atop \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \right]$

   (b) Ker $M = \{v | 2x + 2y - 3z = 0; -x + y + z = 0\} = \mathbb{R}\{(5, 1, 4)\}$
   Im $B = \mathbb{R}\{\text{columnas de B}\} = \mathbb{R}\{(1, 1, -2), (1, 1, 0), (-2, -1, 2)\}$. Estos 3 vectores son l. indep., ==¿ dim Im B = 3.
   La suma dim Ker M + dim Im B = 4 > 3 ==> no pueden ser suma directa.
   Como uno de los dos, Im B, coincide con $\mathbb{R}^3$, la suma de ambos también; luego, cualquier base de $\mathbb{R}^3$ es base de la suma, por ejemplo, la base canónica.
   Teniendo en cuenta que M = A B, el Ker $A = \{Y = B\,X | X \in Ker M\}$.

4. (a) Haciendo eliminación gaussiana por bloques con la matriz ampliada resulta

$$\begin{bmatrix} B & I & I & 0 \\ 0 & B + I & I & 2I \end{bmatrix},$$

   por lo que, como $B$ y $B + I$ son regulares el sistema es compatible determinado

   (b) Por sustitutición hacia atrás se obtiene:

$$\begin{cases} Y = (B + I)^{-1}(I, 2I) \\ X = B^{-1}[(I, 0) - Y] = B^{-1}(B + I)^{-1}(B, -2I) \end{cases}$$

5. (a) Ec. característica: Det(A - x I) = $-1 - 3x - 3x^2 - x^3$
   Valores propios: $\lambda = -1$, $m_1 = 3$.
   Rg (C + I) = 1 ==> $n_1 = 2$ = dim S(-1).
   Por lo tanto, la matriz de Jordan tendrá un bloque de orden 2 y otro de orden 1.
   Una base de Jordan estará compuesta por dos cadenas: $\{b_1, b_2\}$, $\{b_3\}$, en las que $b_1$ y $b_3$ deben ser vectores propios y $b_2 \in N(-1, 2) - N(-1, 1)$
   Observamos que: $C\,v_1 = -v_1$, $C\,v_2 \neq -v_2$, $C\,v_3 \neq -v_3$, $C\,v_4 = -v_4$, es decir, $v_1, v_4$ son vectores propios, y que $(C + I)^2\,v_2 = 0$ y $(C + I)^2\,v_3 = 0$, es decir los dos $\in N(-1, 2) - N(-1, 1)$. En consecuencia, $v_2, v_3$ solo uno de ellos puede pertenecer a una base de Jordan.

(b) Por lo dicho antes, si $v_3 \in N(-1,2) - N(-1,1)$ está en la base de Jordan, este puede ser el $b_2$; entonces, $b_1 = (C+I)\, v_3 = (1,1,1)$. Finalmente, $b_3$ puede ser cualquier vector propio lin. indep. de $b_1, b_2$, por ejemplo, $b_3 = v_4 = (1,0,0)$

6. (a) Es simétrica, ya que $A = A^T$, pero no puede ser definida positiva, aunque el rango sea 4, porque todos los elementos de la diagonal son positivos.

   (b) Evidentemente es diagonalizable, ya que mediante operaciones elementales de congruencia se ha obtenido una congruente diagonal.

   Ninguno de los vectores de la nueva base (la correspondiente a la diagonal) es isótropo, luego el núcleo debe ser el subespacio nulo.

   (c) Se tiene: q(x) $= X^T A\, X = \tilde{X}^T D\, \tilde{X}$ y, además, $P\, A\, P^T = D$, luego $X = P^T\, \tilde{X}$, son las ecuaciones del cambio a la nueva base, por lo tanto, $P$ tiene por filas las coordenadas de los vectores de la nueva base.

   (d) A partir de una matriz diagonal congruente con A se deduce que: rg A = 4 y sig A = 3, luego por el teorema de clasificación lineal , es indefinida.