ALGEBRA (Ingeniería Industrial) Grupos C y E

6 de julio de 2001 Examen final, segunda convocatoria

Prueba de teoría y problemas(87'5%)

1. De la matriz A se conocen solamente los elementos que aparecen a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & * \\ -2 & * & 2 \\ * & * & 2 \end{bmatrix}$$

completar los elementos que faltan, según el caso, para que la matriz A, si es posible, sea: a) singular; b) hérmítica; c) hemisimétrica; d) diagonalizable. Razona que lo son.

2. (a) Clasificar la forma cuadrática definida por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Encontrar una base ortogonal respecto de A que contenga el vector $v_1 = (0, 1, 1)$

3. Se define la matriz B por bloques de la siguiente forma: $B = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$.

(a) Calcular M producto por bloques de las matrices A y B.

(b) Calcular Ker M e Im B, ¿son suma directa?; encontrar una base de la suma de ambos. ¿Están relacionados Ker M y Ker A?

4. Trabajando por bloques discutir y resolver mediante factorización L U el sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} B & I \\ -B & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix}.$$

5. Sea la matriz

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Dos de los siguientes vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ no pueden pertenecer a una misma base de Jordan para la matriz C anterior; decúbrelos y justifícalo.

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

(b) Localiza una base de Jordan en la que esté el vector v_3.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

6. Dada la matriz A siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

mediante MATLAB se han ejecutado los siguientes comandos:

```
det(a)
ans = - 96

rank(a)
ans = 4

a==a'
ans =
         1  1  1  1
         1  1  1  1
         1  1  1  1
         1  1  1  1
```

a) ¿Se puede afirmar que la matriz es simétrica definida negativa?, razónalo.

```
 i=2;j=1;e1=pij(i,j,-ak(i,j)/ak(j,j),4);p=e1;ak=e1*ak*e1'
ak =
        [  4,    0,    2,   -3]
        [  0,  7/4, -3/2,  9/4]
        [  2, -3/2,    6,   -2]
[   -3,  9/4,   -2,    2]

 i=3;j=1;e2=pij(i,j,-ak(i,j)/ak(j,j),4);p=e2*p;ak=e2*ak*e2'
ak  =
        [  4,    0,    0,   -3]
        [  0,  7/4, -3/2,  9/4]
        [  0, -3/2,    5, -1/2]
[   -3,  9/4, -1/2,    2]

 i=4;j=1;e3=pij(i,j,-ak(i,j)/ak(j,j),4);p=e3*p;ak=e3*ak*e3'
ak  =
        [  4,    0,    0,    0]
        [  0,  7/4, -3/2,  9/4]
        [  0, -3/2,    5, -1/2]
        [  0,  9/4, -1/2, -1/4]

 i=3;j=2;e4=pij(i,j,-ak(i,j)/ak(j,j),4);p=e4*p;ak=e4*ak*e4'
ak =
        [  4,    0,    0,    0]
        [  0,  7/4,    0,  9/4]
        [  0,    0, 26/7, 10/7]
        [  0,  9/4, 10/7, -1/4]

 i=4;j=2;e5=pij(i,j,-ak(i,j)/ak(j,j),4);p=e5*p;ak=e5*ak*e5'
ak =
        [   4,     0,     0,     0]
        [   0,   7/4,     0,     0]
        [   0,     0,  26/7,  10/7]
        [   0,     0,  10/7, -22/7]

 i=4;j=3;e6=pij(i,j,-ak(i,j)/ak(j,j),4);p=e6*p;ak=e6*ak*e6'
ak =
        [   4,      0,      0,      0]
        [   0,    7/4,      0,      0]
        [   0,      0,   26/7,      0]
        [   0,      0,      0, -48/13]
```

b) La matriz A es diagonalizable y el núcleo del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ (es decir, el complemento ortogonal de $\mathbb{R}^4$ con respecto a la forma cuadrática definida por la matriz A) es el subespacio nulo, ¿por qué?

```
p =
      [    1,    0,     0,  0]
      [ -3/4,    1,     0,  0]
      [ -1/2,  6/7,     1,  0]
      [ -3/4, -9/7, -5/13,  1]

inv(p) =
      [      1,      0,    0,  0]
      [    3/4,      1,    0,  0]
      [   -1/7,   -6/7,    1,  0]
      [ 151/91,  87/91, 5/13,  1]
```

c) Escribe los vectores de la base en la que A es diagonal, y razónalo.

d) La matriz A es indefinida, ¿por qué?.