ÁLGEBRA (Ingeniería Industrial)

4 de febrero de 2005 Examen final, primera convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

1. Se considera un rectángulo de vértices ABCD y sea S el conjunto formado por todas las transformaciones que lo mantienen en la misma posición.

   (a) Indica cuales son los elementos de S.

   (b) Establece la tabla de $(S, \circ)$ siendo $\circ$ la operación composición.

   (c) Razona si $(S, \circ)$ es grupo conmutativo. ¿Existe algún elemento que genere todos los demás?

   (d) ¿Es cierto, en general, que si en un grupo G todos sus elementos son tales que $a \circ a = 1$, entonces G es conmutativo?

a) S = {g_0, g_1, g_2, g_3}, siendo: g_0 la rotación nula, g_1 la rotación de 180 º, g_2 la simetría horizontal, g_3 la simetría vertical.

b)

	g_0	g_1	g_2	g_3
g_0	g_0	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_0	g_3	g_2
g_2	g_2	g_3	g_0	g_1
g_3	g_3	g_2	g_1	g_0

c) Sí, es grupo conmutativo, ya que la tabla contiene solamente todos los elementos (interna), hay uno (g_0) que no modifica a los demás (el elemento neutro), cada uno de los elementos está una sola vez en cada fila y columna (tiene inverso), la tabla es simétrica con respecto a la diagonal (conmutativa). Además, la composición de transformaciones es asociativa.

No, ya que todos los elementos al cuadrado dan el elemento neutro.

d) Sí, es cierto, ya que

1 = (a.a).(b.b) = (asociativa) a.(a.b).b

y también

1 = (a.b).(a.b) = a.(b.a).b

De la igualdad y por la propiedad simplificativa de los grupos, se deduce que

a.b = b.a

2. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ la aplicación dada por

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p'(0) & p'(1) \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar la matriz cordenada de f en las bases canónicas.

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Calcular la matriz cordenada de f en las bases

$$B_1 = \left\{ 1,\ x\left(x - \frac{1}{2}\right),\ \frac{x^2}{2} \right\} \quad \text{de } \mathbb{R}_2[x]$$

y

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{de } M_2(\mathbb{R}).$$

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x^2 - \frac{x}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\frac{x^2}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Obtener bases de $ker(f)$ e $Im(f)$. ¿Es f inyectiva, suprayectiva o biyectiva?.

$$Kerf = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] / f(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim Kerf + \dim Imf = \dim \mathbb{R}_2[x] \Longrightarrow \dim Imf = 3$

Base de $Imf = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

f es inyectiva ya que $Kerf = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$. No es suprayectiva porque la dimensión del subespacio imagen no coincide con la dimensión de $M_2(\mathbb{R})$ que es 4. Por lo tanto, no es biyectiva.

(d) Razonar si tiene sentido plantearse el estudio de valores propios y vectores propios en este problema.

Puesto que la matriz no es cuadrada no tiene sentido hablar de vectores propios, ya que el transformado de un vector de R^n será otro de R^m (n distinto de m), por lo tanto no será proporcional al primero.

3. Se considera la forma cuadrática q sobre $\mathbb{R}$ dada por:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_2^2 + 2\,a\,x_2\,x_3 + x_3^2 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

(a) Construye la matriz coordenada A de q con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Halla una matriz P, regular, tal que PAP^T sea una matriz diagonal. Determina, en función del parámetro a, el rango y la signatura de q.

Una forma:Hacer operaciones de filas y columnas con matrices elementales:

$$P_{32}(-a)P_{21}(-1)\,A\,P_{12}(-1)P_{23}(-a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} = D$$

$$I_3 P_{21}(-1)P_{32}(-a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & -a & 1 \end{pmatrix} = P$$

$$I_3 P_{12}(-1)P_{23}(-a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^T$$

$$PAP^T = D \iff \quad A \text{ y } D \text{ son congruentes}$$

$$rg(A) = rg(D) = \begin{cases} 3 & a \neq \pm 1 \\ 2 & a = \pm 1 \end{cases}, \qquad sig(A) = sig(D) = \begin{cases} (3,0) & a \in (-1,1) \\ (2,1) & a \notin (-1,1) \end{cases}$$

(c) Se considera la forma polar f de q. En el caso $a = 0$, estudia si f define un producto escalar.

Para $a = 0$ se tiene que $rg(A) = 3$ y $sig(A) = (3,0)$. Por tanto, A es definida positiva y f es una forma bilineal simétrica definida positiva, es decir define un producto escalar.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

4. Se realizan las siguientes operaciones con MATLAB:

```
>> A
A =

     2    -4    -2     0    -8     0    12
     1     6     1     0     4     0    -6
     0     0     4     0     4     0    -8
     0     0    -1     4     0     0     2
     0     0     0     0     0     0     0
     2    12     0     8     8     0    -8
     0     0     0     0     2     0     0

>> eig(A)
ans =

         0
         4
         4
         4
         4
         0
         0

>> c1x=A
c1x =

     2    -4    -2     0    -8     0    12
     1     6     1     0     4     0    -6
     0     0     4     0     4     0    -8
     0     0    -1     4     0     0     2
     0     0     0     0     0     0     0
     2    12     0     8     8     0    -8
     0     0     0     0     2     0     0

>> null(c1x)
ans =
  0 -2
  0  1
  0  2
  0  0
  0  0
  1  0
  0  1

>> c2x=A^2
c2x =

     0   -32   -16     0   -16     0    64
     8    32     8     0     8     0   -32
     0     0    16     0     0     0   -32
     0     0    -8    16     0     0    16
     0     0     0     0     0     0     0
    16    64     0    32    16     0   -32
     0     0     0     0     0     0     0

>> null(c2x)
ans =

    0   0 -2
    0   0  1
    0   2  0
    0   0  0
    0   2 -2
    1   0  0
    0   1  0
```

```
>> d1x=A-4*eye(7)
d1x =

    -2    -4    -2     0    -8     0    12
     1     2     1     0     4     0    -6
     0     0     0     0     4     0    -8
     0     0    -1     0     0     0     2
     0     0     0     0    -4     0     0
     2    12     0     8     8    -4    -8
     0     0     0     0     2     0    -4

>> null(d1x)
ans =

  -2  0
   1  0
   0  0
   0  1
   0  0
   2  2
   0  0


>> d2x=(A-4*eye(7))^2
d2x =

     0     0     0     0    48     0   -32
     0     0     0     0   -24     0    16
     0     0     0     0   -32     0    32
     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0    16     0     0
     0   -32     0   -32   -48    16    32
     0     0     0     0   -16     0    16

>> null(d2x)
ans =

  1 0 0 0
  0 0 1 0
  0 1 0 0
  0 0 0 1
  0 0 0 0
  0 0 2 2
  0 0 0 0
```

A partir de estos cálculos responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Es la matriz A diagonalizable ?.
No, la dimensión de los subespacios fundamentales NO coinide con la multiplicidad de los valores propios.

(b) En caso afirmativo escribe su forma diagonal.En caso de que no lo sea obten su forma canónica de Jordan.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Explica cómo calcularías la matriz de paso P.

Construiría una base de 4 cadenas, 2 asociadas al valor propio 0 y otra dos de 2 vectores cada una asociadas al valor propio 4.