Soluciones

1.- a)
```
syms t
a=[t 1 1;1 1 t;2 2 2];
b=[1 t t*t]';
ab = [a,b]
ab =
[         t,         1,         1,         1]
[         1,         1,         t,    t
[         2,         2,         2, t^2]
i=2;j=1;aux=ab(1,:);ab(1,:)=ab(2,:);ab(2,:)=aux
ab =
[         1,         1,         t,    t]
[         t,         1,         1,         1]
[         2,         2,         2, t^2]
i=2;j=1;ab(2,:)=ab(2,:)-ab(1,:)*t
ab =
[           1,           1,           t,      t]
[           0,         1-t,       1-t^2, 1-t^2]
[           2,           2,           2,    t^2]
i=3;j=1;ab(i,:)=ab(i,:)-ab(j,:)*ab(i,j)
ab =
[           1,           1,           t,           t]
[           0,         1-t,       1-t^2,      1-t^2]
[           0,           0,      2-2*t,    t^2-2*t]
```

En consecuencia,

si $t = 1$, rg A $= 1$ y dim Ker A $= 2$
si $t \neq 1$, rg A $= 3$ y dim Ker A $= 0$

1.- b) El vector b $= (1, \alpha, \alpha^2)$ pertenece a la imagen si la matriz ampliada "ab" y la matriz A tienen el mismo rango, luego

si $t = 1$, $rgA = 1 = rgA|B$, luego el vector b $\in$ Im g
si $t \neq 1$, $rgA = 3 = rgA|B$, luego el vector b $\in$ Im g

2.- a)
```
a=[1/2 1 -1/2 0;1 1/2 0 -1/2;-1/2 0 1/2 1;0 -1/2 1 1/2];
rref(a)
ans =
      1            0            0            -1
      0            1            0             1
      0            0            1             1
      0            0            0             0
```

Luego, Ker $f = \mathbf{R}\{(1, -1, -1, 1)\}$. Pongamos $v_4 = (1, -1, -1, 1)$.

Im $f = \mathbf{R}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \mathbf{R}\{A^1, A^2, A^3\}$, que forman una base.

2.- b)

$$v \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im\ f} \Longrightarrow x = t_4\, v_4 = t_1\, A_1 + t_2\, A_2 + t_3\, A_3,$$

es decir, $T = (t_1, t_2, t_3, -t_4)$ es solución del sistema

$$B\,T = 0, \quad B = \left[\ A^1, A^2, A^3, v_4\ \right]$$

Ahora bien, rg $B = 4$, por eso resulta que Ker $f \cap$ Im $f = \{0\}$

En consecuencia, la suma es directa y

$$\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im\ f} = \mathbf{R}^4$$

2.- c) Como Ker $f = \{v \,|\, A\,x = 0\}$ tiene dimensión 1, $\lambda = 0$ es valor propio simple de A, al menos.

Como ya se ha probado que

$$\mathbf{R}^4 = Kerf \oplus Imf,$$

resulta que si

$$0 \neq v \in Imf \Longrightarrow f(v) \neq 0, \text{pues no es de Ker f, y, además, } v = f(a), \text{para algún } a \in Imf$$

En consecuencia,

$$f^2(a) = f(v) \neq 0,$$

es decir, los únicos vectores que cumplen $A^2\,u = 0$, o bien, $f^2(u) = 0$ son los de Ker f. Por lo tanto,

$$T = \{u \in \mathbf{R}^4\,|A^2 u = 0\} = Kerf$$

Una base está compuesta por el vector $v_4 = (1, -1, -1, 1)$ que genera el Ker f

2.- d)

In[1]:=
```
a
```

Out[1]=
$$\begin{pmatrix} 1/2,\ 1,\ -1/2,\ 0 \\ 1,\ 1/2,\ 0,\ -1/2 \\ -1/2,\ 0,\ 1/2,\ 1 \\ 0,\ -1/2,\ 1,\ 1/2 \end{pmatrix}$$

In[2]:=
```
axi = a − x IdentityMatrix[4]; axi // MatrixForm
```

Out[2]=
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-x & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-x & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

In[3]:=
```
aux = axi[[1]]; axi[[1]] = axi[[2]]; axi[[2]] = aux;
axi // MatrixForm
```

Out[3]=
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-x & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-x & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

In[4]:=
```
i = 2; j = 1; axi[[i]] = axi[[i]] − axi[[j]] * axi[[i, j]];
axi = axi // Simplify; axi // MatrixForm
```

Out[4]=
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4}+x-x^2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(1-2x) \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-x & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

In[5]:=
```
i = 3; j = 1; axi[[i]] = axi[[i]] − axi[[j]] * axi[[i, j]];
axi = axi // Simplify; axi // MatrixForm
```

Out[5]=
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4}+x-x^2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(1-2x) \\ 0 & \frac{1}{4}(1-2x) & \frac{1}{2}-x & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \end{pmatrix}$$

In[6]:=
```
aux = axi[[2]]; axi[[2]] = axi[[4]]; axi[[4]] = aux;
axi // MatrixForm
```

Out[6]=
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \\ 0 & \frac{1}{4}(1-2x) & \frac{1}{2}-x & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4}+x-x^2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(1-2x) \end{pmatrix}$$

In[7]:=
```
i = 3; j = 2;
axi[[i]] = axi[[i]] − axi[[j]] * axi[[i, j]]/ axi[[j, j]];
axi = axi // Simplify; axi // MatrixForm
```

Out[7]=
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \\ 0 & 0 & 1-2x & 1-x+x^2 \\ 0 & \frac{3}{4}+x-x^2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(1-2x) \end{pmatrix}$$

In[8]:=
```
i = 4; j = 2;
axi[[i]] = axi[[i]] − axi[[j]] * axi[[i, j]]/ axi[[j, j]];
axi = axi // Simplify; axi // MatrixForm
```

Out[8]=
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \\ 0 & 0 & 1-2x & 1-x+x^2 \\ 0 & 0 & 1+2x-2x^2 & 1-x-3x^2+2x^3 \end{pmatrix}$$

```
In[9]:= i = 4; j = 3;
        axi[[i]] = axi[[i]] - axi[[j]] * axi[[i, j]]/ axi[[j, j]];
        axi = axi // Simplify; axi // MatrixForm
```

$$Out[9]= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-x & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}-x \\ 0 & 0 & 1-2x & 1-x+x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2x\left(2-x-2x^2+x^3\right)}{-1+2x} \end{pmatrix}$$

```
In[10]:= Factor[axi[[4, 4]]]
```

$$Out[10]= \frac{2(-2+x)(-1+x)x(1+x)}{-1+2x}$$

En consecuencia,

$$Det(A - x\, I) = 0 = (-2+x)\,(-1+x)\,x\,(1+x) \Longrightarrow \lambda = 1,\,-1,\,2,\,0$$

Luego la base de Jordan está formada por un vector propio de cada uno de los subespacios fundamentales:

$$\begin{array}{l} (A - I)\,v_1 = 0 \Longrightarrow v_1 = (1,1,1,1) \\ (A + I)\,v_2 = 0 \Longrightarrow v_2 = (-1,1,-1,1) \\ (A - 2\,I)\,v_3 = 0 \Longrightarrow v_3 = (-1,-1,1,1) \\ (A - 0\,I)\,v_4 = 0 \Longrightarrow v_4 = (1,-1,-1,1) \end{array}$$

3.- a)

```
d = [a, eye(4)]
     1/2        1       -1/2        0          1    0   0    0
      1        1/2        0       -1/2         0    1   0    0
    -1/2        0        1/2        1          0    0   1    0
      0       -1/2        1        1/2         0    0   0    1
i=2;j=1;d(i,:)=d(i,:)-d(j,:)*d(i,j)/d(j,j)
i=3;j=1;d(i,:)=d(i,:)-d(j,:)*d(i,j)/d(j,j)
d(1,2)=0;d(1,3)=0
d =
     1/2        0         0         0          1    0   0    0
      0       -3/2        1       -1/2        -2    1   0    0
      0         1         0         1          1    0   1    0
      0       -1/2        1        1/2         0    0   0    1
d(1,2)=0;d(1,3)=0
i=3;j=2;d(i,:)=d(i,:)-d(j,:)*d(i,j)/d(j,j)
i=4;j=2;d(i,:)=d(i,:)-d(j,:)*d(i,j)/d(j,j)
d(2,3)=0;d(2,4)=0
d =
     1/2        0         0         0          1     0    0    0
      0       -3/2        0         0         -2     1    0    0
      0         0        2/3       2/3       -1/3   2/3   1    0
      0         0        2/3       2/3        2/3  -1/3   0    1
i=4;j=3;d(i,:)=d(i,:)-d(j,:)*d(i,j)/d(j,j)
d(3,4)=0
d =
     1/2        0         0         0          1           0    0    0
      0       -3/2        0         0         -2           1    0    0
      0         0        2/3        0        -1/3         2/3   1    0
      0         0         0         0          1          -1   -1    1
```

En consecuencia, rg $q = 3$ y sg $q = 2$, luego la forma cuadrática es indefinida.

3.- b) Una base asociada a la diagonal es la formada por las filas de la matriz constituida por las últimas 4 columnas de la matriz d última, es decir, las filas de la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.- c) Como la matriz A no es definida positiva, no se puede obtener la factorización de Cholesky, pues esta requiera el cálculo de las ríaces cuadradas de los elementos de la diagonal d, y hay algonos de ellos negativos.

4.- a) Veamos si los datos que se nos ofrecen permiten realizar la partición de multiplicidades del único valor propio. Recordemos que $\mathrm{E}_k(\lambda) = N(\lambda, k)$.

Puesto que $n_1 = p_1 = \dim \mathrm{E}_1(\lambda) = 2$, solo se podrán construir dos cadenas de vectores para la base de Jordan y, por lo tanto, habrá dos cajas de Jordan.

Si dim $\mathrm{E}_1(\lambda) = 2 \Longrightarrow \alpha_1 = \text{rg } A - \lambda I) = 3$

Si dim $\mathrm{E}_3(\lambda) = 5 \Longrightarrow \alpha_3 = \text{rg } A - \lambda I)^3 = 0$

Por lo tanto, $\alpha_2 = \text{rg } (A - \lambda I)^2 = 2, 1$ ó 0, puesto que $N(\lambda, 1) \subset N(\lambda, 2) \subset ...$

Si $\alpha = 2, \Longrightarrow p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = 2 \Longrightarrow q_3 = 2, q_2 = -1$, que no es posible, pues no puede haber bloques de dimensión negativa.

Si $\alpha = 1, \Longrightarrow p_1 = 2, p_2 = 2, p_3 = 1 \Longrightarrow q_3 = 1, q_2 = 1, q_1 = 0$ que es posible, pues habrá un bloque de orden 3 y otro de orden 2.

Si $\alpha = 0, \Longrightarrow p_1 = 2, p_2 = 3 \Longrightarrow q_2 = 3$, que no es posible, pues la suma de las dimensiones de los bloques sería 6, mayor que la dimensión del espacio $\mathbf{R}^5$.

Luego, es posible.

4.- b) La relación de semejanza habitual es

$$H\,Q = Q\,J, \text{ es decir, } H = Q\,J\,Q^{-1},$$

luego la que se pide es $P = Q^{-1}$. Para encontrarla, por ejemplo, hay realizar operaciones elementales sobre la matriz ampliada de la Q con la matriz unidad hasta conseguir al unidad en el bloque que ocupa Q. Así se obtiene

```
p = inv(q)
     1         0         0         0         0
    -1         1         0         0         0
     1        -1         1         0         0
    -1         1        -1         1         0
     1        -1         1        -1         1
```

5.- a) La reducción por filas de la orden 2) indica que $v_3 = -2\,v_1 + v_2$

5.- b) Las columnas de la matriz "smw" construida en la orden 5) tiene por columnas la unión de una base de S y otra de W, luego es un sistema generador de $S + W$. En la orden 6) se obtiene que son independientes, luego es una base de $S + W$, constituida por 4 vectores, en consecuencia, $S + W$ coincide con $\mathbf{R}^4$. Luego

$$\dim\,(S \cap W) = \dim\,S + \dim\,W - \dim\,(S + W) = 0,$$

es decir, $S \cap W = 0$

5.- c) Según el apartado anterior, $S + W = \mathbf{R}^4$ y $S \cap W = 0$, luego la suma es directa y son sumplementarios.

5.- d) El proceso seguido en las órdenes 7) a 19) nos indica que la matriz "smw" es inversible con inversa P = "smw"$^{-1}$ igual al bloque compuesto por las últimas 4 columnas.

5.- e) Estos vectores son las columnas de la inversa de la matriz "smw", luego el rango es 4 y los vectores son linealmente independientes, es decir, una base de $\mathbf{R}^4$.

5.- f) Basta observar que P = "smw"$^{-1}$ es la matriz producto de todas las operaciones elementales realizadas sobre las filas de "smw" para obtener la matriz unidad, así que basta escribir

$$P\,\text{“}smw''\,I = I,$$

que es la relación de equivalencia entre "smw" y I.