Soluciones

1.- a)

$M_{\mathrm{R}}(n) = \{A \,|\, regular\}$. Veamos que cumple las 5 propiedades definidoras de grupo abeliano o conmutativo:

o) interna: el producto de matrices regulares es regular (Det(A B) $\neq$0)
1) asociativa: Trivial
2) existe elem. neutro $A_0 = I$
3) A^{-1} existe por ser A regular.
4) conmutativa: no se cumple, basta un contraejemplo sencillo

1.- b)

$$(A + B)\, A^{-1}\, (A - B) = (A - B)\, A^{-1}\, (A + B)$$

Basta operar ambos miembros para llegar a una identidad.

2.-

La expresión coordenada de q es

$$q(x, y, z) = (x\, y\, z)\, A\, (x\, y\, z)^T$$

Tomamos como $\boldsymbol{a}$ un vector tal que $q(\boldsymbol{a}) \neq 0$, por ejemplo, $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)$.

Ahora, buscamos $\boldsymbol{b}$ tal que $(x, y, z)\, A\, (1, 0, 0)^T = 0$, es decir, $x + 2y + z = 0$

Escogemos como $\boldsymbol{b}$, por ejemplo, el vector $\boldsymbol{b} = (1, 1, -1)$

Ahora, buscamos $\boldsymbol{c}$ tal que

$$(x, y, z)\, A\, (1, 0, 0)^T = 0, \quad (x, y, z)\, A\, (1, 1, -1) = 0,$$

es decir, $x + 2y + z = 0$ y $\; -y + 2z = 0$

Escogemos como $\boldsymbol{c}$, por ejemplo, el vector $\boldsymbol{b} = (-7, 2, 1)$

Por lo tanto, en la base $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ la matriz coordenada de q será

$$B = diag(1, -3, -60)$$

3.-

Mediante operaciones elementales de congruencia (sobre filas y sobre columnas) obtenemos:

```
p=eye(3);   d=a;
i=2;j=1;t=-d(i,j)/d(j,j);e=pij(i,j,t,3);  p=e*p;   d=e*d*e'
d =
      1            0            3
      0           -7           -6
      3           -6            1
i=3;j=1;t=-d(i,j)/d(j,j);e=pij(i,j,t,3);   p=e*p;   d=e*d*e'
d =
      1            0            0
      0           -7           -6
      0           -6           -8
i=3;j=2;t=-d(i,j)/d(j,j);e=pij(i,j,t,3);   p=e*p;   d=e*d*e'
d =
      1            0            0
      0           -7            0
      0            0        -20/7
p =
      1            0            0
     -2            1            0
   -9/7         -6/7            1
```

Como las matrices A y D anteriores están asociadas a la misma forma cuadrática, tendrán el mismo rango y la misma signatura, es decir, el mismo tipo de definición. Como B también tiene el mismo rango y signatura también será congruente con A y con D.

En concreto, rang q = 3, sign q = 1, luego q será indefinida.

4.-

$\{v_1, v_2\}$ es una familia generadora libre de S, luego es una base de S.

Las ecuaciones que definen T son: x - y + z - t = 0, x - t = 0,
es decir, si $v \in T$, v = (x, y, y, x) = x (1, 0, 0, 1) + y (0, 1, 1, 0),
luego

$$T = \mathbb{R}\{v_3 = (1, 0, 0, 1), v_4 = (0, 1, 1, 0)\}$$

Por otro lado, la suma de S y T será directa si, por ejemplo, $\text{rg}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 4$. Así que, haciendo reducción por filas de la matriz siguiente:

```
R =
     1          -1           0           1
     0           0           1           0
     0           0           1           0
    -1          -1           0           1
```

que tiene por columnas las coordenadas de los vectores v_j

```
rref(R) =
     1           0           0           0
     0           1           0          -1
     0           0           1           0
     0           0           0           0
```

y obtenemos que el rango es 3, o sea que no es suma directa.

5.-

Si Ker f = Im f, aplicando el teorema de las dimensiones:

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V = 4$$

resulta que dim Im f = dim Ker f = 2. Ahora bien, los vectores v_1 y v_2 pertenecen a Im f y son linealmente independiente, luego forman una base de Im f y también de Ker f.

Por lo tanto, ampliando la base $\{v_1, v_2\}$ del Ker f con los vectores v_3 y v_4, cuyas imágenes conocemos, hasta conseguir una base del espacio $\mathbb{R}^4$, resulta que la matriz asociada a f en esta base es la H siguiente y la matriz del cambio de la base canónica a la $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es la P siguiente

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz G de f en la base canónica será:

$$G = P\,H\,P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.-

Si el único valor propio de C es -2 significa que sólo hay un núcleo generalizado y, por lo tanto, alguna potencia de la matriz $C - (-2)I$ debe ser la matriz nula. En efecto:

$$C - (-2)I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (C - (-2)I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Su multiplicidad algebraica será 3, evidentemente.

Como el rang $(C + I) = 1$, resulta que su multiplicidad geométrica será n_1 = dim N(-2, 1) = 3 - 1 = 2.

Como rang $(C + I)^2 = 0$, dim N(-2, 2) = 3, es decir, N(-2, 2) = $\mathbb{R}^3$, luego $f(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$, trivialmente.

7.-

Como n_1 = dim N(-2, 1) = 2, la matriz de Jordan tiene dos cajas asociadas al valor propio -2, que serán de orden 2 y 1, respectivamente; luego la base de Jordan estará formada por dos cadenas: la primera, $\{u_1, u_2\}$, de dos elementos, la segunda, $\{u_3\}$, de un elemento, asociadas ambas al valor propio -2.

$u_2 \in N(-2,2) - N(-2,1)$, es decir, tal que (A + 2 I)^2 $u_2 = 0 \Longrightarrow u_2 = (1,0,0)$

u_1 tal que u$_1 = (A+2I)$u$_2 = (-1,-1,-1)$

u_3 tal que (A + 2 I) $u_3 = 0$ y linealmente independiente de u_1, por ejemplo, u$_3 = (-1,1,0)$

La matriz del cambio a la base de Jordan será:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

```
c*p == p*j

        1              1              1
        1              1              1
        1              1              1
```

8.- i)

Es cierto, ya que, poniendo a = 1, mediante operaciones elementales con las filas y con las columnas de ambas matrices E y F se ha llegado a la misma matriz con "1" en la diagonal y ceros fuera. Esto prueba que son equivalentes precisamente para a = 1.

8.- ii)

Según nos indican, se cumple:

qe E pe = qf F pf

luego F = qf^{-1} qe E pe pf^{-1}, es decir, F = Q-1EP

como se nos muestra.

8.- iii)

Puesto que E y F son equivalentes, las bases respecto de las que la matriz coordenada de f es F serán las definidas por las columnas de la matrices P y Q anteriores, es decir, laa basea

$$\{v_1 = (1,0,0,0),\quad v_2 = (-5,1,0,0),\quad v_3 = (17/3,-5/6,1,0),\quad v_4 = (32/3,0-7/3,0,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^4$$

$$\{w_1 = (1/2,-7/2,-2),\quad w_2 = (0,9,5),\quad w_3 = (0,0,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$