ALGEBRA (Ingeniería Industrial) Grupos A, D y E

20 de enero de 2003 Examen primera convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1.- Prueba que el conjunto $GL_{\mathbb{R}}(n)$ de matrices cuadradas regulares de orden n es un grupo. Prueba que, en general, en dicho grupo se cumple:

$$(A+B)\,A^{-1}\,(A-B) = (A-B)\,A^{-1}\,(A+B)$$

2.- Dada la forma cuadrática q cuya matriz coordenada respecto de una base conocida es la A anterior, encontrar tres vectores a, b, c que sean conjugados dos a dos respecto de q y que formen una base de $\mathbb{R}^3$.

3.- Mediante operaciones elementales sobre las filas y sobre las columnas de la matriz A anterior, obtener una matriz D diagonal congruente con la A. ¿Qué tienen en común las matrices A, B y D anteriores?. Clasificar la forma cuadrática q.

4.- Encuentra una base del subespacio S de $\mathbb{R}^4$ engendrado por los vectores $\{v_1 = (1,0,0,-1), v_2 = (-1,0,0,-1)\}$ y otra del subespacio T cuyos vectores cumplen que la suma de la diferencia de sus dos primeras coordenadas y la diferencia de las dos últimas es nula y la primera menos la cuarta también es nula. La suma de los subespacios S y T, ¿es suma directa?.

5.- Hallar la matriz coordenada de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ respecto de la base canónica, sabiendo que: a) el vector $v_3 = (1,1,0,0)$ se transforma por f en el $v_1 = (0,1,0,-1)$, b) el vector $v_4 = (1,0,1,0)$ se transforma por f en el $v_2 = (1,1,1,0)$ y c) Ker f = Im f.

6.- Si el endomorfimo $f \in \mathbb{R}^3$ tiene como matriz coordenada respecto de una base conocida la matriz

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Encuentra que el único valor propio de f es -2, halla su multiplicidad geométrica y prueba que el núcleo generalizado $N(-2,2)$ (también denotado por $E_2(-2)$ y llamado núcleo iterado) es invariante por f (es decir, $f(N(-2,2)) \subset N(-2,2)$).

7.- Encuentra una base (de Jordan) para la matriz de Jordan del endomorfismo f del apartado **??** anterior.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

8.- Dadas las matrices equivalentes E y F siguientes:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

se realizan las siguientes operaciones con MATLAB

```
qe=eye(3);pe=eye(4);d=E
      1           5           -1           2
      2           1            4           1
      1           2            1           1
i=2;j=1; t=-d(i,j)/d(j,j); e=pij(i,j,t,3); qe=e*qe;  d= e*d
      1           5           -1           2
      0          -9            6          -3
      1           2            1           1
i=3;j=1; t=-d(i,j)/d(j,j); e=pij(i,j,t,3); qe=e*qe;  d= e*d
      1           5           -1           2
      0          -9            6          -3
      0          -3            2          -1
i=2;j=2; t=1/d(j,j); e=pij(i,j,t,3); qe=e*qe;  d= e*d
      1           5           -1           2
      0           1          -2/3         1/3
      0          -3            2          -1
i=3;j=2; t=-d(i,j)/d(j,j); e=pij(i,j,t,3); qe=e*qe;  d= e*d
      1           5           -1           2
      0           1          -2/3         1/3
      0           0            0           0
i=2;j=3; t=-d(i,j)/d(i,i); e=pij(i,j,t,4); pe=pe*e;  d= d*e
      1           5           7/3          2
      0           1            0          1/3
      0           0            0           0
i=2;j=4; t=-d(i,j)/d(i,i); e=pij(i,j,t,4); pe=pe*e;  d= d*e
      1           5           7/3         1/3
      0           1            0           0
      0           0            0           0
i=1;j=2; t=-d(i,j)/d(i,i); e=pij(i,j,t,4); pe=pe*e;  d= d*e
      1           0           7/3         1/3
      0           1            0           0
      0           0            0           0
i=1;j=3; t=-d(i,j)/d(i,i); e=pij(i,j,t,4); pe=pe*e;  d= d*e
      1           0            0          1/3
      0           1            0           0
      0           0            0           0
i=1;j=4; t=-d(i,j)/d(i,i); e=pij(i,j,t,4); pe=pe*e;  d= d*e
      1           0            0           0
      0           1            0           0
      0           0            0           0
**********************
qf = eye(3);  pf = eye(4);    d = F
      2           0            1           2
      1          -1            2           3
      0           2           -3          -4
i=2;j=1; t=-d(i,j)/d(j,j); e=pij(i,j,t,3); qf=e*qf;  d= e*d
      2           0            1           2
      0          -1           3/2          2
      0           2           -3          -4
i=3;j=2; t=-d(i,j)/d(j,j); e=pij(i,j,t,3); qf=e*qf;  d= e*d
      2           0            1           2
      0          -1           3/2          2
      0           0            0           0
i=2;j=2; t=1/d(j,j); e=pij(i,j,t,3); qf=e*qf;  d= e*d
      2           0            1           2
      0           1          -3/2         -2
      0           0            0           0
```

```
i=2;j=3; t=-d(i,j)/d(i,i); e=pij(i,j,t,4); pf=pf*e;  d= d*e
      2           0           1           2
      0           1           0          -2
      0           0           0           0
i=2;j=4; t=-d(i,j)/d(i,i); e=pij(i,j,t,4); pf=pf*e;  d= d*e
      2           0           1           2
      0           1           0           0
      0           0           0           0
i=1;j=1; t=1/d(j,j); e=pij(i,j,t,3); qf=e*qf;  d= e*d
      1           0          1/2          1
      0           1           0           0
      0           0           0           0
i=1;j=3; t=-d(i,j)/d(i,i); e=pij(i,j,t,4); pf=pf*e;  d= d*e
      1           0           0           1
      0           1           0           0
      0           0           0           0
i=1;j=4; t=-d(i,j)/d(i,i); e=pij(i,j,t,4); pf=pf*e;  d= d*e
      1           0           0           0
      0           1           0           0
      0           0           0           0

q =  inv(qe) * qf
     1/2          0           0
    -7/2          9           0
     -2           5           1
p = pe * inv(pf)
      1          -5          17/3        32/3
      0           1          -5/6        -7/3
      0           0           1           0
      0           0           0           1
E * p == q * F
      1           1           1           1
      1           1           1           1
      1           1           1           1
```

Razona, sin hacer otros cálculos, que:

i) a puede valer 1;

ii) si a $= 1$, F $=$ Q^{-1} E P;

iii) si a $= 1$ y E es la matriz asociada a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecto de las bases canónicas, ¿respecto de qué bases será F la matriz coordenada de f?