Soluciones

1.a)

Forma primera: por equivalencia, $\exists P, Q$ regulares tales que $P\,A\,Q = D$; proceso: realizar operaciones elementales sobre las filas y las columnas de A.

Forma segunda: por semejanza, $\exists P$ regular tales que $P^{-1}\,A\,P = D$;para que esto ocurra se tiene que cumplir, ya que los valores propios de D son -2 doble y -1 simple, que rg(A + 2 I) fuese 1 (y lo es). Esta matriz es la que tuviese por columnas vectores propios aoxiados a los valores propios -2, -2, -1.

Forma tercera: por congruencia. Como la matriz A es simétrica, si la signatura de A fuese 0 y el rango 3 (igual que los de D), existiría una matriz regular P tal que $P\,A\,P^T = D$. Proceso: realizar operaciones elementales de congrruencia, es decir, las mismas operaciones elementales sobre filas y sobre columnas.

Cuarta forma: por congruencia ortogonal. En las hipótesis de la tercera, también existe una matriz ortogonal (cuyas columnas son vectores propios asociados a los valores propios de la diagonal D)

2.a)

Primera: solo se conserva el rango; rg A = rg D = 3

Segunda: rango, polinomio característico (y sus coeficientes, que son det(A), tr(A), etc.) subespacios fundamentales

Tercera, el rango y la signatura.

Cuarta, los de la tercera más los de la cuarta.

3.a)

Por congruencia obtenemos:

```
p=eye(3);d=a;
i=2;j=1;t=-d(i,j)/d(j,j);e=pij(i,j,t,3);p=e*p;d=e*d*e'

d =

    -12             0             -8
      0          -5/3            2/3
     -8           2/3             -6

i=3;j=1;t=-d(i,j)/d(j,j);e=pij(i,j,t,3);p=e*p;d=e*d*e'

d =

    -12             0              0
      0          -5/3            2/3
      0           2/3           -2/3

i=3;j=2;t=-d(i,j)/d(j,j);e=pij(i,j,t,3);p=e*p;d=e*d*e'

d =

    -12             0              0
      0          -5/3              0
      0             0           -2/5

i=3;j=3;t=1/sqrt(2/5);e=pij(i,j,t,3);p=e*p;d=e*d*e'

d =

    -12             0              0
      0          -5/3              0
      0             0             -1
```

```
i=2;j=2;t=sqrt(2)/sqrt(5/3);e=pij(i,j,t,3);p=e*p;d=e*d*e'

d =

    -12              0              0
      0             -2              0
      0              0             -1

i=1;j=1;t=sqrt(2)/sqrt(12);e=pij(i,j,t,3);p=e*p;d=e*d*e'

d =

     -2              0              0
      0             -2              0
      0              0             -1
p =
   881/2158          0              0
   878/687       505/461            0
  -228/721       456/721        721/456
```

Una base $\{v_i\}$ pedida puede ser la definida por las filas de la matriz P anterior

4.a)

Como$X = P^T \tilde{X}$, ya que P^T es triangular superior, se resuelve por sustitución hacia atrás, resultando: $\tilde{X} = (703/574, 373/681, 456/721)^T$

5.a)

Resolver la ecuación característica: $Det(A - \lambda I) = 0 = (x + 2)^2\,(x + 1)$ Como son subespacios fundamentales generalizados su intersección es el subespacio nulo. Por lo tanto, serán suplementarios si la suma de las dimensiones es 3. Como

```
(a+2*eye(3))*(a+2*eye(3)) =
      0              0              0
     -2              2             -2
     -1              1             -1
```

resulta rg $(A + 2I)^2 = 1 \Longrightarrow$ dim N(-2, 2) = 2 y, por lo tanto, los dos subespacios son suplementarios.

6.a)

Como rg (A + 2 I) = 2 $\Longrightarrow$ $n_1 = dimN(-2, 1) = 1$, es decir, la matriz de Jordan tiene una sola caja asociada al valor propio -2, es decir, de orden 2; asociada al valor propio -1 habrá una sola caja de orden 1; luego la base de Jordan estará formada por dos cadenas: la primera, $\{u_1, u_2\}$, de dos elementos, asociada al valor propio -2, la segunda, $\{u_3\}$, de un elemento, asociada al valor propio -1.

u_1 tal que (A + 2 I) $u_1 = 0 \Longrightarrow u_1 = (1, 0, -1)$
u_2 tal que (A + 2 I) $u_2 = u_1 \Longrightarrow u_2 = (1, 1, 0)$
u_3 tal que (A + I) $u_3 = 0 \Longrightarrow u_3 = (0, 1, 1/2)$

7.a)

$A_p = \{A^p \,|\, p \in \mathbb{Z}\}$. Veamos que cumple las 5 propiedades definidoras de grupo abeliano o conmutativo:

o) interna: $A^p\,A^q = A^{p+q} \in A_p, \forall p, q \in \mathbb{Z}$
1) asociativa: $A^p\,(A^q\,A^r) = A^p\,A^{q+r} = A^{p+(q+r)} = A^{p+q+r} = (A^p\,A^q)\,A^r, \forall p, q, r \in \mathbb{R}$
2) existe elem. neutro $X = A^z \in A_p$ tal que $A^p\,A^z = A^p = A^z\,A^p \Rightarrow p + z = p \Rightarrow z = 0 \Rightarrow X = A^0 = I$

3) $\forall A^p \in A_p$existe $A^q \in A_p$tal que $A^p\, A^q = I = A^q\, A^p \Rightarrow A^{p+q} = I \Rightarrow q = -p \Rightarrow A^q = A^{-p}$. Observar que $A^{-p} = A^{-1}\, \ldots, A^{-1}$ y que A^{-1} existe por ser A regular, pues $rg\, A = 3$.

4) conmutativa: $A^p\, A^q = A^{p+q} = A^{q+p} = A^q\, A^p$

7.b)

$A_{2p} = \{A^{2p} | p \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de A_p, ya que $A^{2p}.A^{2q} = A^{2(p+q)} \in A_{2p}$

7.c)

A_{2p} es subgrupo normal, puesto que A^p es grupo conmutativo.

7.d)

Los elementos de A_{2p} se pueden obtener como sigue:

$A_{2p} = P\, J^{2p}\, P^{-1}$, siendo J la matriz de Jordan y P la matriz del cambio a la base de Jordan. Como

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{J}^{2p} = diag.bl.(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{2p}, (-1)^{2p}) = diag.bl.(\begin{pmatrix} (-2)^{2p} & 2p(-2)^{2p-1} \\ 0 & (-2)^{2p} \end{pmatrix}, (-1)^{2p}) =$$
$$= diag.bl.(\begin{pmatrix} 2^{2p} & p\, 2^{2p} \\ 0 & (-2)^{2p} \end{pmatrix}, 1)$$

8.a)

El vector v1 obtenido pertenece al núcleo de st, puesto que $st\,.v1 = (0,0,0)^T$ y ésta es la forma de obtener el núcleo de una matriz; el vector v_1 del enunciado no pertenece al núcleo, ya que al ser $A \in M_{\mathrm{R}}(3,4)$, el Ker A debe ser subespacio de $\mathbb{R}^4$, además, el producto $st\,.v_1$ no está definido.

8.b)

La dim S no puede ser 1, ya que esta engendrado por dos vectores linealmente independientes.

8.c)

Esta afirmación es cierta, ya que al ser $v1 = (1,1,0,1)$ generador del núcleo de la matriz st, es decir, $st\,.v1 = (0,0,0)^T$, esta igualdad implica que la suma de las dos primeras columnas de st es igual a la cuarta cambiada de signo.

8.d)

Base de S: B_S =$\{\mathrm{v}_1 + v_2, v_2\}$. Base de T: B_T =$\{\mathrm{v}_1 + v_2, v3\}$; Base de S + T = $B_S \cup B_T = \{v_1 + v_2, v_2, v_3\}$