Soluciones

1. (a) Basta probar que si H_1 y H_2 son antisimétricas, $t_1\,H_1 + t_2\,H_2$ también lo es, ya que su transpuesta coincide con su opuesta.

   (b) Las matrices de H, para $n = 3$, son de la forma

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix},$$

   por lo que hay tres parámetros independientes, y cualquier matriz se puede escribir como combinación de tres linealmente independientes, en la forma:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   luego la dim $H = 3$.

2. (a)

$$A_S = (A + A^T)/2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_H = (A - A^T)/2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (b) Una matriz A de la intersección verifica: $A = A^T = -A^T$, luego $A = 0$

3. (a) Ker $A_H = \{v \in \mathbb{R}^3\,|A_H\,X = 0\}$, resolviendo el sistema por eliminación gaussiana resulta Ker $A_H = \mathbb{R}\{(-1,1,1)\}$

   (b) Como el KerA_H es no nulo, un valor propio de A_H es $t_1 = 0$, y los restantes son complejos por ser hemisimétrica, luego diagonalizable en $\mathbb{C}$ y no diagonalizable en $\mathbb{R}$. Otro modo: Se puede encontrar el polinomio característico: $p_{A_H} = x^3 + 3x$, que tiene tres raíces simples, una real y dos complejas conjugadas.

4. (a) Serán equivalentes si las matrices ampliadas de los dos sistemas son equivalentes. Haciendo reducción por filas de la matriz ampliada $A_H|B_1$ se llega en dos pasos a la ampliada del segundo sistema.

   (b) Una solución particular de estos dos sistemas se obtiene a partir del segundo, $x_p = B_2$. Todas las soluciones se obtienen en la forma: x_p + Ker $A_H = (-2,-1,0) + \mathbb{R}\{(-1,1,1)\} = \{(-2-t,-1+t,t)|t \in \mathbb{R}\}$

5. (a) ord F = min $\{k \in \mathbb{Z}|A^k = I\}$. Teniendo en cuenta la forma can. de Jordan de A, se tiene $A^n = P\,J^n\,P^{-1} = I$, o bien $J^n = P^{-1}\,I\,P = I$, por lo que los elementos de la diagonal de J^n que son de la forma λ^n deben ser iguales a 1; en consecuencia, todos los valores propios de A deberían ser 1, pero esto es falso, luego ord F $= \infty$.

   (b) Observar que los valores propios de A son $t_1 = -2, m_1 = 3$ y que $N(-2,2) = \mathbb{R}^3$, es decir, $(A + 2I)^2 = 0$. Por lo tanto, A^2 y todas las restantes potencias de A son combinación lineal de A e I.

6. A partir del ejercicio anterior, rg $(A + 2I) = 1 \Longrightarrow n_1 =$dim N(-2,1) = 2; por lo tanto, hay dos cajas de Jordan y la forma canónica de Jordan será:

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

   y una base de Jordan estará formada por una cadena de dos vectores y otra de uno, $\{v_1, v_2, v_3\}$, siendo

   $v_2 \in N(-2,2) - N(-2,1)$, por ejemplo, $v_2 = (0,1,0)$

$v_1 = (A + 2I)\, v_2 = (2, 1, 1)$

$v_3 \in N(-2, 1)$, por ejemplo, $v_3 = (0, 1, 1)$.

En consecuencia, $A = P\, J\, P^{-1}$, siendo $P = \{\{2, 0, 0\}, \{1, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}\}$ Facilmente se encuentra que

$$J^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & (-2)^{n-1} n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix}$$

y en consecuencia:

$$\frac{1}{1024} A^{10} = \frac{1}{1024} P\, J^{10}\, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 10 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

7. (a) Fijada una base, $\{v_j\}$, una forma sesquilineal F sobre $\mathbb{R}^3$ define una única matriz, su matriz coordenada, que verifica: $F(x, y) = X^T A \overline{Y}$ y $a_{ij} = F(v_i, v_j)$. Recíprocamente, dada una matriz cuadrada sobre $\mathbb{C}$, A, ésta define la forma sesquilineal F que respecto de la base canónica, por ejemplo, tiene como expresión coordenada: $F(x, y) = X^T A \overline{Y}$.

   En concreto, esta forma sesquilineal es bilineal simétrica, ya que A_S es simétrica real.

$$F(v, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

   (b) Después de lo dicho, es suficiente que A_S sea definida positiva. Haciendo dos operaciones elementales de congruencia se obtiene:

$$A_S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 \end{bmatrix},$$

   por lo tanto, no es definida positiva, es definida negativa.

   (c) El procedimiento más simple consiste en realizar operaciones de congruencia hasta llegar a una matriz congruente diagonal, como en el apartado anterior, pero conservando las operaciones realizadas sobre las filas de la matriz unidad, es decir, realizando estas operaciones sobre la matriz ampliada de A_S con la matriz unidad. Las filas de la matriz que finalmente ocupa el lugar de la matriz unidad componen una base ortogonal respecto de A_S.

   También se puede resolver aplicando el método de de Lagrange o el de los conjugados siguiente. Como el rg $A_S = 3$, todos los vectores son no isótropos; así que tomamos, por ejemplo, $v_1 = (0, 1, 0)$.

   Buscamos, ahora, $v_2 = (x, y, z)$, tal que

$$[x\, y\, z]\, A_S\, v_1^T = 0, \text{ es decir, } [x\, y\, z]\, [1\ -1\, 0]^T = 0,$$

   es decir, $x = y$. Escogemos, por ejemplo, $v_2 = (1, 1, 0)$

   Buscamos, ahora, $v_3 = (x, y, z)$, tal que

$$[x\, y\, z]\, A_S\, v_1^T = 0 \text{ y } [x\, y\, z]\, A_S\, v_2^T = 0,$$

   es decir,

$$[x\, y\, z]\, [1\ -1\, 0]^T = 0 \text{ y } [x\, y\, z]\, [-1\, 0\ -1]^T = 0, \text{ es decir, } x = y \text{ y } z = -x.$$

   Escogemos, por ejemplo, $v_3 = (1, 1, -1)$.

   Comprobación: $v_2\, A_S\, v_1^T = 0$, $v_3\, A_S\, v_1^T = 0$, $v_3\, A_S\, v_2^T = 0$

8. (a) No es suma directa porque la suma, que está engendrada por las columnas de 'smt', tiene rango 4, menor que el número de columnas, como se ve en el resultado 'rref(smt)'. Además, la columna 4 es combinación lineal de las 3 primeras como se ve en el mismo resultado.

   (b) En la intersección están los vectores solución del sistema homogeneo definido por la matriz 'smt'. Los comandos 'aux = [smt',eye(5)]' y 'xt = rref(aux)' permiten resolver dicho sistema homogeneo, siendo la solución la columna (1,2,1,-1,0) que se encuentra bajo la última columna de ceros. Lo que significa que:

$$1s^1 + 2s^2 + 1s^3 = -1t^1 = -(1, 1, 2, 1)t^1,\ t^1 \in \mathbb{R},$$

   es un vector que engendra la intersección.