ALGEBRA (Ingeniería Industrial) Grupos C y E

10 de febrero de 2001 Examen final, primera convocatoria

Prueba de teoría y problemas (87'5%)

Se considera el endormorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial es $Y = A\,X$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

su matriz coordenada respecto de cierta base conocida $\{v_j\}$.
Se pide:

1. (a) Probar que el conjunto H de todas las matrices antisimétricas de orden n sobre un cuerpo K es un subespacio vectorial de $M_K(n)$.
   (b) En el caso $n = 3$, ¿cuál es su dimensión?; escribir una base de H y probar que lo es.

2. (a) Encontrar una matriz simétrica A_S y una matriz antisimétrica A_H cuya suma sea la matriz A dada más arriba.
   (b) Probar que el conjunto de todas las matrices simétricas y el de las antisimétricas de orden 3 son subespacios suplementarios.

3. Suponiendo que la matriz A_H del apartado 2a es

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   (a) encontrar una base de su núcleo.
   (b) ¿Sería diagonalizable un endomorfismo cuya matriz coordenada en alguna base fuese A_H?; justifícalo.

4. (a) Justifica que son equivalentes los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

$$A_H\,X = B_1 \quad \text{y } M\,X = B_2,$$

   siendo A_H la mencionada en el apartado 3, M, B_1, B_2 las siguientes matrices:

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (b) Conociendo el núcleo de A_H encontrado en el apartado 3a, hallar todas las soluciones del sistema anterior.

5. (a) ¿Cuál es el orden del subgrupo F de $GL_{\mathrm{R}}(3)$ (con respecto al producto de matrices) engendrado por A.
   (b) Prueba, encontrando los subespacios generalizados de A, que cualquier potencia de A pertenece al subespacio vectorial engendrado por A e I.

6. Todos los elementos de la potencia A^{10} están intimamente relacionados con 1 Kb (1 kilobyte = 1024 bytes), descubre esa relación calculando dicha potencia y dividiendola por 1024.

7. Suponiendo que la matriz A_S del apartado 2a es

$$A_S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

   (a) Justifica que A_S define una forma sesquilineal sobre $\mathbb{R}^3$ y calcula el "producto" mediante dicha forma de los vectores v = (1,0,1) y w = (0,1,0).

   (b) ¿Define A_S un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$?.

   (c) Encuentra una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto de A_S.

Prueba de prácticas de laboratorio (12'5%)

8. Mediante MATLAB se han ejecutado los siguientes comandos:

```
 s=[1 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];s=s'
s =
     1     0     0
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
 t=[1 1 2 1;2 0 -1 1];t=t'
t =  1     2
     1     0
     2    -1
     1     1
 smt = [s,t]
smt =
     1     0     0     1     2
     1     0     0     1     0
     0     1     0     2    -1
     0     0     1     1     1
 rref(smt)
ans =
     1     0     0     1     0
     0     1     0     2     0
     0     0     1     1     0
     0     0     0     0     1
 aux = [smt',eye(5)]
aux =
     1     1     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     1     0     0     1     0     0
     1     1     2     1     0     0     0     1     0
     2     0    -1     1     0     0     0     0     1
 xt = rref(aux)'
xt =       1          0          0          0          0
           0          1          0          0          0
           0          0          1          0          0
           0          0          0          1          0
           0          0          0          0          1
         1/2       -5/2          1          0          2
        -1/2       -1/2          0          1          1
           0          1          0          0         -1
         1/2       -1/2          0          0          0
```

A partir de los resultados obtenidos, justificar razonadamente que son correctas las afirmaciones siguientes:

   (a) La suma de los subespacios engendrados por las columnas de las matrices S y T no es suma directa y dicha suma coincide con $\mathbb{R}^4$.

   (b) La intersección de los subespacios anteriores está engendrada por el vector (1,1,2,1).