FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1. Calcula los siguientes límites y dibuja en cada caso la función en un entorno del límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x/2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+x^3}}.$$

2. Una fuente de alimentación suministra un voltaje periódico en el tiempo de modo que en $[-\pi, \pi]$ vale $V(t) = e^{-t^2}$. Aproxima esta función en torno a los puntos 0 y $\pi/2$ mediante el polinomio de Taylor de grado 4. Dibuja la función y el polinomio en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

3. La trayectoria de un móvil en dos dimensiones viene descrita por las ecuaciones

$$\begin{cases} x(t) = t\cos(t) \\ y(t) = t\sin(t). \end{cases}$$

   a) Dibuja la trayectoria desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$ y la recta tangente en los puntos $t = 1.7$ y $t = \pi$.

   b) Determina los puntos de corte de estas rectas tangentes con los ejes coordenados.

4. La aproximación de Fourier de orden n, $V_n(t)$, de la función $V(t)$ en el intervalo $[a, b]$ está dada por la suma

$$V_n(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kwt) + b_k \sin(kwt))$$

   donde $w = 2\pi/T$ (con $T = b - a$) se denomina frecuencia fundamental y

$$a_k = \frac{2}{T}\int_a^b V(t)\cos(kwt)dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_a^b V(t)\sin(kwt)dt, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

   son las amplitudes de oscilación correspondientes a las frecuencias kw.

   Sea $V(t)$ la función del problema 2,

   a) Calcula la aproximación de Fourier $V_3(t)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Dibuja $V(t)$, $V_3(t)$ y la diferencia $V(t) - V_3(t)$ en $[-\pi, \pi]$.

   b) ¿Cuál de las aproximaciones anteriores usarías para calcular $V(1.6)$? ¿Y para calcular la integral de 0 a π de $V(t)$?