PRACTICAS DE ORDENADOR DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS PARA ALUMNOS DE GEOLÓGICAS

Manuel Calvo y Tomás Grande

CURSO 2005/06

Índice general

Prefacio

La asignatura de Matemáticas de la licenciatura de Geológicas tiene según el plan docente actual, 4 créditos (40 horas lectivas) de prácticas de ordenador y 5 créditos teóricos.

Esta proporción tan fuertemente ponderada hacia las prácticas comparativamente con lo que es habitual en otras asignaturas, es una oportunidad inmejorable para desarrollar las habilidades de los alumnos frente al ordenador. Y para poder realizar un enfoque quasi-empírico e inductivo de los conceptos matemáticos de la asignatura.

Para realizar las prácticas de ordenador se ha elegido como software *Mathematica 4.0*, un manipulador algebraico de fácil manejo y ampliamente extendido dentro de las aplicaciones científicas. *Mathematica 4.0* es una herramienta informática muy poderosa y ampliamente extendida entre los profesionales científicos para resolver un amplio rango de problemas.

Los alumnos de primer curso hacia los que van dirigidas estas prácticas se ven amplia y gratamente sorprendidos de que, a diferencia de lo que pasa con las calculadoras que es lo único que suelen haber manejado, con un manipulador algebraico como *Mathematica* se puede realizar cálculo simbólico con expresiones matemáticas muy diversas.

Aprender a usar un manipulador como *Mathematica* desde el primer curso de la licenciatura es poseer una poderosa herramienta para poder resolver multitud de problemas y ejercicios prácticos que seguro se van a plantear a lo largo de la carrera de estudiante y de profesional. Ahora bien, como todas las herramientas, también ésta hay que saber utilizarla bien y debe estar a nuestro servicio y no al revés, es decir, nosotros debemos saber a priori, en la mayoría de los casos cuál puede ser el resultado y desde luego cuál no puede serlo porque la solución que nos da el manipulador es absurda. Tales resultados absurdos pueden darse ocasionalmente, en la mayoría de los casos porque nuestros datos son incorrectos o la instrucción que se introduce tiene algún error, y en otros casos porque el programa no es completo para resolver esa situación (no existe la herramienta perfecta, universal).

Este manipulador, *Mathematica*, es capaz de manipular simbólicamente polinomios, fracciones (como se aprende a hacerlo con lápiz y papel), resolver de manera exacta en algunos casos las raíces de una ecuación, y en gran cantidad de casos hallar las raíces con muy buena aproximación. Es capaz de trabajar con números reales con gran preción de decimales, puede operar con números complejos; manipula como en álgebra con los vectores y las matrices; en el campo del análisis es capaz de representar muy bien gráficas de funciones de una y dos variables, calcula límites, derivadas, integrales definidas e indefinidas. Además, tiene otras posibilidades como la resolución de ecuaciones diferenciales (este caso no se realiza pues sobrepasa los conocimientos de este curso).

Es especialmente relevante la potencia de *Mathematica* en la representación gráfica de funciones que resulta muy útil en muchos campos de la ciencia. Además, su gran versatilidad gráfica, permite en muchos casos problemáticos, haciendo una buena elección del rango de dibujo o realizando adecuados "zooms"de la zona a estudiar, encontrar la solución con gran fiabilidad. Por ejemplo, en la localización de raíces, estudio de máximos de una y dos variables, intersecciones de curvas, etc.

El curso, dado que es un primer curso de licenciatura de geológicas, está pensado para utilizar *Mathematica* de manera interactiva. Sin embargo, con *Mathematica* también se puede hacer programación. Tan solo en algunos casos simples se dan resueltos algunos programas simples que contienen algún bucle, para que los alumnos lo comprendan y lo modifique muy ligeramente hacia su problema concreto.

Las prácticas se desarrollan en sesiones de 1 hora y 30 minutos por alumno y semana, en el aula de informática. A cada sesión asisten entre 30 y 40 alumnos (2 grupos de prácticas) y cada dos alumnos forman un equipo de trabajo. Cada equipo de 2 alumnos dispone de un ordenador para poder realizar las prácticas. A cada sesión de prácticas asisten 2 profesores y durante la primera parte de la sesión se dan las explicaciones oportunas y se desarrollan ejemplos suficientes. A continuación, en una segunda parte de la sesión, los alumnos deben desarrollar con el ordenador una serie de ejercicios relacionados con la materia explicada. Además de una evaluación continua del rendimiento de los alumnos durante la sesión de prácticas, cada cierto periodo que suele ser de un mes aproximadamente, los alumnos deben realizar unos ejercicios específicos de evaluación.

En las sesiones de prácticas se resuelven ejercicios relacionados con los contenidos de la asignatura de Matemáticas pero que son especialmente indicados para realizar con el ordenador por su complejidad de cálculo. También, se hacen otra serie de ejercicios más simples y cuya solución es ya conocida para corroborar dichos resultados con la respuesta del ordenador.

La experiencia de estos años nos hace pensar que estas prácticas son, en general, bien acogidas por los alumnos y que son una herramienta muy poderosa y de gran ayuda a la hora de resolver los ejercicios de la asignatura.

Dada la gran cantidad de ejemplos resueltos que hay, la exposición, creemos, que pausada y clara de los contenidos teóricos y los muchos ejercicios de dificultad creciente que contiene cada práctica, este manual puede ser utilizado también de modo autodidáctico y por estudiantes de primer curso de otras licenciaturas de ciencias.

Los autores,

Manuel Calvo Pinilla
Tomás Grande Ventura

1.1. Práctica 1. Primera toma de contacto con Mathematica

En las prácticas de esta asignatura utilizaremos el programa **Mathematica**: un software de uso general que permite realizar facilmente gran número de operaciones matemáticas y cálculos, bien sea en forma simbólica o numérica, y visualizar funciones y datos. Además **Mathematica** puede usarse como lenguaje de programación creando funciones, estructuras repetitivas, de decisión y recursiones.

Comenzaremos en nuestro ordenador desplegando sucesivamente

$$\text{Inicio} \quad \rightarrow \quad \text{Mathematica 4.1}$$

Entonces con doble click abriremos Mathematica 4.1 (lleva un icono como una estrella espacial de varias puntas).

En este momento nos aparece en pantalla una hoja en blanco con la cabecera

Untitled-1 (Sin título-1)

Cabe notar que Mathematica está todo en Inglés (no hay versión en Español), y por eso todas las órdenes, instrucciones e información nos la vamos a encontrar en dicho idioma.

Este documento en blanco que tenemos en la pantalla se llama "Notebook". Como aún no le hemos dado un nombre, Mathematica le asigna automáticamente el nombre "Untitled-1" (si ahora se creara otro documento nuevo le pondría "Untitled-2" y así sucesivamente).

En la barra azul arriba de "Untitled-1" a la derecha nos encontramos, de izquierda a derecha, tres cuadros:

- El primero para minimizar la pantalla
- El segundo para maximizar la pantalla
- El tercero para cerrar el documento.

de momento para trabajar mas cómodos lo vamos a maximizar y ocuparemos toda la pantalla.

Seguidamente escribiremos los nombre y apellidos de los dos componentes del grupo de trabajo. Si el tamaño de letra nos resulta algo pequeño vamos a hacerlo mas grande. Desplegaremos el menú Format y nos vamos la parte inferior donde está Magnification y le ponemos p.e. 150 (quiere decir un 150 % del tamaño normal). Podemos probar con otras ampliaciones para elegir la mas adecuada a nuestras necesidades.

Ahora queremos decirle a Mathematica que escriba nuestro nombres. Para dar las instrucciones a Mathematica tenemos distintos comandos, en este caso hay que usar el comando "Printçuya sintaxis es:

Print ["....... "]

Observa que el comando comienza por una palabra (con mayúscula) que suele estar asociada a la orden que se quiere dar y las instrucciones específicas están encerradas entre corchetes. Además en este caso los nombres van entre comillas.

Una vez que hemos escrito las instrucciones del comando, para ordenar a Mathematica que las ejecute presionaremos a la vez las teclas

Shift o mayúsculas (a la izda) y **Enter**

y vemos que nos devuelve los nombres.

Seguimos con un cálculo sencillo con enteros: $3 + 5 - 16$ y ejecutamos. Nos devuelve -5.

Observa que Mathematica organiza la tarea por celdas: Hasta ahora nos hemos encontrado celdas de entrada ("In.ª la izda) donde se indican los datos introducidos por el usuario, y las celdas de salida (.ºut.ª la izda) que reflejan los resultados de la evaluación realizados por el "kernel.ª partir de los datos de entrada. Nota que Mathematica asocia a cada celda de entrada una celda de salida y que van numeradas correlativamente. Esta numeración se sigue aunque nos vayamos de una parte a otra del documento e incluso aunque nos pasemos a otro "Notebook". Esto significa que el "kernel"guarda todas las definiciones y evaluaciones realizadas desde que se inicia el programa Mathematica hasta que se sale de éste.

Al ir trabajando en nuestro documento conviene hacer comentarios u observaciones para que si lo usamos mas adelante podamos recordar facilmente lo que se iba haciendo. Para escribir dichos comentarios se deben encerrar entre paréntesis y estrellas en la forma siguiente:

(* En los próximos Pilares me voy a dar caña con Mathematica *)

Cuando Mathematica se encuentra estos comentarios no hace nada y sigue adelante.

Vamos a ver como se manejan y operan distintos tipos de números:

Enteros $\quad 6-13+8 \quad (=1)$

Racionales $\quad (3/4)+(5/6)+(6/131) \quad \left(=\frac{2561}{1572}\right)$

Reales $\quad$ Sqrt [2] + Sqrt [3] + 3 ∗ Sqrt [2] $\quad (=4\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Nota. Algunos números reales especiales tienen nombres propios: El número $\pi = 3.1415...$ se denota con **Pi**. El número e=2.1728... se denota con **E**.

Con los enteros las operaciones conocidas. Con los racionales despues de la operación reduce la fracción resultante. Con los reales simplifica lo que puede pero de momento no los escribe en forma decimal para no hacer aproximaciones.

Si en este momento nos interesa la forma decimal aproximada podemos usar el comando **N [%]** que quiere decir: devuélveme en forma decimal el resultado que aparece en la última celda (se emplea el % para el de la última celda y % X para el resultado que está en la celda X). En el ejemplo anterior

N [%] $\quad \to \quad$ 7.38891

Observa que por defecto Mathematica da el resultado con cinco decimales. Si queremos p.e. 30 decimales pondríamos **N [%, 30]** .

Para obtener el resultado de una operación en forma decimal podemos lograrlo escribiendo después de la instrucción de la operación **//N** , por ejemplo

Sqrt [2] + Sqrt [3] + 3 * Sqrt [2] //N $\quad \to \quad$ 7.38891

Hay que observar que si escribimos un número entero (racional) sin punto decimal Mathematica lo toma como tal, pero que si le ponemos un punto decimal, entonces Mathematica lo considera como número decimal (es decir real). Por ejemplo 2 sería un entero pero 2. sería un real y si calculamos su raiz cuadrada

Sqrt[2] $\to \sqrt{2}$ $\qquad$ Sqrt[2.] $\to$ 1.41421

Esta situación se aplica a las operaciones, p.e.

$$13335/666 \quad \to \quad \frac{4445}{222} \quad \text{pero} \quad 13335./666 \quad \to \quad 20.0225$$

(Basta poner el punto en uno de los números para que toda la operación se realice en real).

Las operaciones aritméticas usuales

$+$	suma
$-$	diferencia
$*$ o espacio	producto
$/$	cociente
$\wedge$	potenciación

mantienen la prioridad habitual del del calculo: primero potenciación, luego cociente etc. , salvo que pongamos paréntesis.

Las potencias anidadas se evalúan de derecha a izquierda, p.e.

$$3\hat{}2\hat{}4 = 3^{16} = 43046721$$

pero las divisiones y restas van de izquierda a derecha p.e.

$$32/2/4/2 = 16/4/2 = 4/2 = 2$$

De todas formas, para evitar dudas, lo mejor es usar paréntesis.

Ejercicios

1) Calcula el valor exacto y el aproximado con seis decimales de las siguientes expresiones:

$$\left(\frac{2+\pi}{3+\sqrt{2}}\right)^{323/626}, \qquad \left(\frac{e+124}{36+\sqrt{8}}\right)^{\frac{2+\sqrt[3]{2}}{5+\sqrt[4]{6}}}, \qquad \left(\sqrt[6]{2}\right)^{\sqrt[4]{36}}, \qquad \left(\frac{2+e}{\sqrt[3]{68}}\right)^{\frac{23+\sqrt[3]{52}}{155+\sqrt[2]{6}}}$$

2) Las funciones trigonométricas se representan

Sin[x], **Cos[x],** **Tan[x]**

donde el argumento se supone dado en radianes. Cuando el argumento está expresado en grados hay que añadir el factor de corrección **Degree** $= (\ 180/\ \pi\ )$. Por ejemplo el seno de 30 grados se escribiría: **Sin[30 Degree]**. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

$$\frac{\mathrm{sen}(63^0)+\cos(21^0)}{\tan(32^0)}, \qquad \left(\frac{(1+\mathrm{sen}(\pi))^4}{\cos(33^0)}\right)^{\tan(32^0)}.$$

1.2. Práctica 2. Números Complejos y algunos gráficos de figuras elementales

Recordemos que los números complejos escritos en la forma binómica $a+bi$ donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$ aparecen, por ejemplo, al resolver algunas ecuaciones de segundo grado y en otros problemas matemáticos.

En Mathematica la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ se representa con **I**, por tanto $a + b$ **I** será el número complejo que escribimos habitualmente en la forma: $z = a + bi$. Otras notaciones de Mathematica relacionadas con los complejos son:

- La parte real a de $z = a + bi$ se escribe **Re** [**z**].
- La parte imaginaria b de $z = a + bi$ se escribe **Im** [**z**].
- El conjugado de $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$ y se escribe **Conjugate** [**z**].
- El módulo de $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ se escribe **Abs** [**z**].
- El argumento θ del complejo $z = a + bi$, que verifica $\tan\theta = b/a$ se escribe **Arg** [**z**] (Mathematica da el argumento en radianes y está comprendido entre $(-\pi, \pi]$ de manera que es positivo cuando z está en los dos primeros cuadrantes y negativo cuando está en el tercero o cuarto).

Representación de los números complejos en el plano

Por ejemplo, si resolvemos la ecuación de segundo grado $x^2 - 6x + 10 = 0$ podemos usar el comando **Solve** poniendo

$$\mathbf{Solve[x^2 - 6x + 10 == 0\ ,x\ ]}$$

(observa que las ecuaciones se escriben con un doble igual). Mathematica nos da las raíces

$$z_1 = 3 - \mathbf{I}, \qquad z_2 = 3 + \mathbf{I}$$

cuyos módulos y argumentos son:

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{10}, \quad \text{Arg}\,[z_1] = -0.321751..\text{rad}, \quad \text{Arg}\,[z_2] = 0.321751..\text{rad}$$

Recuerda que para pasar de

$$\text{Grados} \to \text{Radianes} \qquad \text{hay que multiplicar por} \quad \mathbf{Degree} = \frac{180}{\pi}$$

Ejercicios

1. Calcula, con cinco decimales, todas las raíces de la ecuación $x^4 - 6x^3 + x - 1 = 0$.

Calcula el módulo y argumento de sus raíces complejas.

¿Qué relación existe entre las raíces complejas de una ecuación polinómica con coeficientes reales?

2. Repite el ejercicio anterior con la ecuación

$$x^4 + 2x^3 + 17x^2 + 18x + 72 = 0$$

3. Los complejos aparecen también al calcular el logaritmo de números negativos. En Mathematica el logaritmo neperiano de a se escribe **Log [a]** y el logaritmo de base b de a se escribe **Log [b , a]** . Calcula $\log(-2)$ y $\log_{10}(-2)$ y obtén su módulo y argumento.

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones expresando el resultado en forma binómica

$$\frac{(-2+i)^6}{1-3i}, \quad \frac{-1-i\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-i)^4}, \quad \frac{(1+\sqrt{2}i)^4}{(i+\sqrt{2})^5}$$

(puedes usar el comando **ComplexExpand**[ ] o bien usar aritmética real)

Dado un número complejo $z = a + bi$ de módulo $r = |z|$ y argumento θ, se puede escribir también en la forma trigonométrica

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$$

ya que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$.

Esta forma trigonométrica es útil para algunas operaciones complejas como potencias y raíces. Así, sabemos que todo número complejo z tiene n raíces n–ésimas $w_1, w_2, \ldots w_n$: todas con el mismo módulo $\rho = \sqrt[n]{r}$ y argumentos

$$\frac{\theta}{n}, \quad \frac{\theta + 2\pi}{n}, \quad \frac{\theta + 2 \cdot 2\pi}{n}, \ldots \frac{\theta + (n-1)2\pi}{n},$$

es decir

$$w_1 = \rho\, e^{\left(\frac{i\theta}{n}\right)}, \; w_2 = \rho\, e^{\left(\frac{i(\theta + 2\pi)}{n}\right)}, \; \ldots, \; w_n = \rho\, e^{\left(\frac{i(\theta + (n-1)\pi)}{n}\right)}.$$

Ejemplo: Para calcular las raíces cuartas de $4 + 6i$ obtenemos primero el módulo de las raíces

$$\mathbf{modraiz} = (\mathbf{Abs}[\mathbf{4} + \mathbf{6} * \mathbf{I}])^{(1/4)}$$

y entonces las raíces serán:

$$\begin{aligned}
w1 &= \mathbf{modraiz} * \mathbf{Exp}[\mathbf{I} * \mathbf{Arg}[\mathbf{z}]/\mathbf{4}] \;//\mathbf{N}, \\
w2 &= \mathbf{modraiz} * \mathbf{Exp}[\mathbf{I} * (\mathbf{Arg}[\mathbf{z}] + \mathbf{2} * \mathbf{Pi})/\mathbf{4}] \;//\mathbf{N}, \\
w3 &= \mathbf{modraiz} * \mathbf{Exp}[\mathbf{I} * (\mathbf{Arg}[\mathbf{z}] + \mathbf{4} * \mathbf{Pi})/\mathbf{4}] \;//\mathbf{N}, \\
w4 &= \mathbf{modraiz} * \mathbf{Exp}[\mathbf{I} * (\mathbf{Arg}[\mathbf{z}] + \mathbf{6} * \mathbf{Pi})/\mathbf{4}] \;//\mathbf{N},
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Calcula todas las raíces cúbicas del complejo conjugado de $1/(3 - 2i)$.

2. Calcula todas las raíces cuartas del complejo $(\sqrt{23} + 5i)/(2 + \sqrt{5}i)$.

3. De las raíces quintas de $\log(-3)$ determina las de mayor y menor parte imaginaria.

4. Determina z tal que $z, z_1 = 2+i, z_2 = 1+i$ formen un triángulo equilátero. Resuelve en el caso de un triángulo isósceles con lado $zz_1 =$ lado $zz_2 = 2*$ lado z_1z_2.

4. Dados los números complejos $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i$, determina otros dos números complejos z_3, z_4 de modo que z_1, z_2 y z_3, z_4 sean parejas de vértices opuestos del cuadrado z_1, z_3, z_2, z_4.
5. Dados los números complejos $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 5 + 6i$, determina otro número complejo z_3 que esté alineado con los anteriores y la distancia de z_3 a z_1 sea el doble que z_3 a z_2.

Gráficos bidimensionales de figuras geométricas sencillas

Para construir gráficos de figuras geométricas sencillas del plano con Mathematica procederemos en tres pasos:

1. Definir el elemento o elementos de la figura (puntos, poligonales, círculos etc).
2. Fabricar el gráfico con el comando **Graphics** .
3. Para verlo en pantalla usar el comando **Show**.

Por ejemplo para dibujar la poligonal que une los puntos $(0,0), (2,0), (2,2), (4,2)$ para el apartado 1)definiremos la poligonal con el comando **Line** escribiendo las coordenadas de los puntos encerradas entre llaves en la forma

$$\mathbf{poli} = \mathbf{Line}[\{\{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{0}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{2}\}, \{\mathbf{4}, \mathbf{2}\}\}\ ]$$

(aquí a la poligonal se le ha llamado “**poli**”) y luego

$$\mathbf{Show}[\mathbf{Graphics}[\mathbf{poli}]]$$

Nota. Es frecuente definir los elementos geométricos con nombres que recuerdan su forma o figura e igual ocurrirá mas adelante con otros elementos matemáticos. Esto es bastante práctico pero para ser coherentes deberíamos dar nombre distintos a elementos distintos y a , a veces, sin darnos cuenta repetimos nombres y nos puede llevar a resultados equivocados. Para evitar esto, antes de antes de definir un elemento que vamos a llamar p.e. **nombre**, podemos usar el comando **Clear** [**nombre**] cuyo efecto es desasignar, si es que existe, algún elemento que se hubiera llamado así. Otra posibilidad es hacer una desasignación total, es decir de todos los objetos definidos hasta el momento en la sesión de trabajo, para ello se emplea el comando

Clear [" Global '* "]

(el acento después de **Global** es el acento grave).

Algunos elementos geométricos simples bastante utilizados son los siguientes:

- **Point** [**{** x, y **}**] Genera el punto de coordenadas (x, y).
- **Line** [**{ {** x_1, y_1 **}, {**x_2, y_2 **}, . . . }**] Crea la poligonal que une los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ etc.
- **Polygon** [**{ {**x_1, y_1 **}, {**x_2, y_2 **}, . . . }**] Lo mismo que **Line** pero cierra la poligonal uniendo el último con el primero y rellena el interior de negro.
- **Rectangle** [**{** x_1, y_1 **}, {** x_2, y_2 **}**] Define un rectángulo con los puntos dados como vértices opuestos.
- **Circle** [**{** x_1, y_1 **}, r**] Crea un círculo de centro (x_1, y_1) y radio r.(Si en vez de **Circle** se pone **Disk** el círculo queda sombreado).
- **Circle** [**{** x_1, y_1 **}, r, {** a_0, a_1 **}**] Crea un arco de circunferencia de centro (x_1, y_1) y radio r entre los ángulos a_0 y a_1 medidos en radianes.

Haremos algunas pruebas: Comenzaremos dibujando una poligonal

$$\textbf{Show}[\textbf{Graphics}[\textbf{Polygon}[\{\{\mathbf{1,2}\},\{\mathbf{2,0}\},\{\mathbf{1,2}\},\{\mathbf{0,0}\}\}]]]$$

¿Qué ocurre aquí?. Cambia al comando **Line**.

Seguimos con una circunferencia de centro el punto $(1, 2)$ y radio 2 unidades. Definimos la figura

$$\textbf{cir} = \textbf{Circle}[\{\mathbf{1,2}\},\mathbf{2}], \qquad \textbf{Show}[\textbf{Graphics}[\textbf{cir}]]$$

Apreciamos que en vez de una circunferencia nos aparece una elipse. Ello es debido a que Mathematica escala de distinta manera las figuras en los ejes coordenados, es decir la unidad del eje OX no es la misma que la del eje OY. Si queremos que la escala sea 1:1 deberemos especificarlo. Entonces al hacer el gráfico incluiremos la instrucción **AspectRatio** $->$ **Automatic** y pondremos

Show [Graphics [cir, AspectRatio − > Automatic]]

Igualmente si queremos que aparezcan los ejes coordenados pondremos **Axes** $->$ **True** o sea

Show [Graphics [cir, AspectRatio − > Automatic, Axes − > True]]

Ejercicios
1. Dibuja la semicircunferencia derecha del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 2.
2. Dibuja la circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 1 junto a un cuadrado inscrito en dicha circunferencia. El mismo dibujo con el cuadrado circunscrito.
3. Inscribe cuatro círculos negros en el cuadrado de vértices opuestos $(0, 0)$ y $(4, 4)$.
4. Se puede generar una elipse de centro (x, y) y semiejes a y b con el comando

Circle [{ x , y } , { a , b }]

Dibuja una elipse de centro el origen y semiejes 4 y 2 e inscribe dos discos de radio 0.5 en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Prueba a ponerle gafas.

Si dibujamos un punto p.e. el $(2, 2)$ podríamos proceder:

punto = Graphics[Point [{ 2, 2, }]]
Show [punto , AspectRatio − > Automatic, Axes − > True]

y vemos que el punto es bastante canijo y no se distingue bien en la pantalla. Para darle mayor tamaño tenemos en Mathematica el comando **Absolute-PointSize[n]** donde **n** es un número que indica el número de veces del original, p.e. para un punto que sea 5 veces el original definiríamos el punto así

punto = Graphics [{ AbsolutePointSize[5], Point [{ 2 , 2 }] }]

y luego haríamos el **Show** igual.

Análogamente para dibujar una línea mas gruesa se usa el comando **AbsoluteThickness[n]**. Por ejemplo

linea = Graphics [{ AbsoluteThickness[3], Line [{ { 0 , 0 },{ 2 , 3 } }] }]

nos da la poligonal entre los puntos indicados con grueso de línea 3.

Si queremos representar a la vez el punto y la línea pondríamos

Show [{ punto, linea } , AspectRatio − > Automatic, Axes − > True]

Ejercicio.

Dibuja una puerta con la forma indicada y distintos anchos del marco

Ahora vamos a aprovechar las propiedades de las raíces de los números complejos para dibujar polígonos y otras figuras geométricas regulares. Recordemos que las raíces n–ésimas de un número complejo z tienen todas el mismo módulo y están en los vértices de un polígono regular de n lados. Entonces para dibujar p.e. un pentágono, tomamos $z = 1$ que tiene módulo 1 argumento $\theta = 0$ y sus raices quintas serán

z1= Exp [0 I], z2 = Exp [(2 Pi I) /5], z3 = Exp [(4 Pi I)/5], z4 = Exp [(6 Pi I) / 5], z5 = Exp [(8 Pi I) / 5]

por tanto los vértices del pentágono tienen las coordenadas

ve1 = { Re [z1] , Im [z1] }, ve2 = ...

y así el pentágono, con ancho de línea 2, sería

penta = Graphics [{ AbsoluteThickness[2], Line [{ ve1, ve2, ve3, ve4, ve5, ve6, ve1 }] }]

y su gráfica

Show [penta , AspectRatio − > Automatic]

resultando

Ejercicios.
1. Gira el pentágono para que tenga un lado horizontal.
2. Dibuja una estrella de David.

1.3. Práctica 3. Continuación con gráficos de figuras sencillas

---

Hemos visto que para visualizar un punto **p1** del plano cartesiano de coordenadas (x_1, y_1) poníamos

p1 = Graphics [**Point** [**{ x1 , y1 }**]]; **Show** [**p1**]

Si queremos representar simultáneamente varios puntos $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$, podemos proceder definiendo sucesivamente cada uno de los puntos y luego juntarlos en el **Show**, sin embargo esto puede resultar muy engorroso cuando hay muchos puntos y por eso Mathematica ha creado un comando específico para este fin llamado **ListPlot** cuya sintaxis es:

ListPlot [**{ { x1, y1 }, ... { xn, yn } }**]

Este comando no necesita **Graphics** y **Show** y nos genera automáticamente una figura en pantalla que muestra todos los puntos respecto a unos ejes coordenados que elige **Mathematica** (el origen no está necesariamente en el $(0, 0)$).

Recordemos que, en el caso de un solo punto, si queremos aumentar el tamaño del punto (por ejemplo cuatro veces) al definir **p1** poníamos

p1 = Graphics [**{ AbsolutePointSize** [4], **Point** [**{ x1 , y1 }**] **}**]

análogamente en el caso de una lista de puntos usaremos la especificación

PlotStyle − > AbsolutePointSize [**6**]

que se coloca antes de cerrar el **ListPlot** para seis veces el tamaño normal de los puntos.

Ejemplo: Dibuja a tamaño 5 los puntos $(1, 2), (2, 3), (3, 4), \ldots, (10, 11))$.
Vamos a bautizar esta figura, p.e. con el nombre **fig1** y pondremos

fig1= ListPlot [**{ { 1,2 }, { 2,3 }, ... { 10,11 } }, PlotStyle − > AbsolutePointSize** [**6**]]

Si ahora tenemos otra (u otras) figuras,p.e. el círculo

fig2= Graphics [**Circle** [**{ 1,1 }, 1/2**]] podemos ver las dos (o mas) figuras superpuestas con

Show [{ fig1, fig2 }, AspectRatio− >Automatic]

Cuando hay muchos puntos es conveniente por claridad definir los puntos aparte en una lista. Aunque ya se estudiarán mas adelante baste decir por el momento que en **Mathematica** una lista es un conjunto de elementos que se representan colocados sucesivamente y encerrados entre llaves. En particular, si los elementos son puntos del plano la lista tendrá la forma

lista1= { {x1,y1}, {x2,y2}, . . . {xn,yn} }

Para fabricar algunas listas de puntos de carácter repetitivo tenemos un comando llamado **Table** que puede simplificar las cosas. Por ejemplo, la **lista1** podría fabricarse con

lista1 = Table [{ i , i+1 } , { i , 1 , 10 }]

que significa que construye una lista de puntos de coordenadas genéricas $(i, i+1)$ donde el índice i recorre los valores desde 1 hasta 10 de uno en uno. Entonces la **fig1** quedaría

fig1= ListPlot [lista1 , PlotStyle − > AbsolutePointSize [6]]

Ejercicios.
1. Dibuja los puntos p_i del plano de coordenadas

$$p_i = \left(\cos\left(\frac{\pi i}{8}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{8}\right)\right), \qquad i = 1, \ldots, 17,$$

con varios tamaños del punto usando el comando "**Table** ". Observa que estos puntos son los vértices de un polígono regular de 16 lados inscrito en la circunferencia unidad. Pinta simultáneamente la circunferencia unidad y los puntos gordos.

Para obtener la gráfica a escala 1-1 llama p.e. **figu1 = ListPlot [..]** y luego usa "**AspectRatio − > Automatic** " en la forma

Show [figu1, AspectRatio − > Automatic]

Dibuja conjuntamente el polígono y sus vértices, destacando estos últimos en tamaño grueso.

2. Repite el ejercicio anterior con los puntos del polígono estrellado

$$\left(2^{(-1)^i}\ \cos\left(\frac{\pi i}{6}\right), 2^{(-1)^i}\ \text{sen}\left(\frac{\pi i}{6}\right)\right), \qquad i = 1, \ldots, 13$$

Recuerda que los comandos **Rectangle, Polygon, Disk** fabrican las figuras correspondientes rellenas de color negro. Podemos variar este tono con el comando

GrayLevel [x]

donde **x** es un número comprendido entre 0 (negro) y 1 (blanco). Por ejemplo, si fabricamos la figura formada por dos cuadrados de vértices opuestos $(0,0),(1,1)$ y $(1,1),(2,2)$

fig2 = Graphics[{ GrayLevel [0.3], Rectangle [{ 0 , 0 }, { 1, 1 }] }];
fig3 = Graphics[{ GrayLevel [0], Rectangle [{ 1 , 1 }, { 2 , 2 }] }];
Show [{ fig2, fig3 } , AspectRatio − > Automatic]

tenemos dos cuadrados unidos por el vértice. Uno de ellos gris (el de **GrayLevel [0.3]**) y el otro negro (el de **GrayLevel [0]**) (prueba con diferentes tonos de grises).

Ejercicios.

1. Usando los comandos **Line** y **Rectangle** dibuja un tablero con borde de 4×4 cuadrados alternativamente blancos y negros como se indica en la figura de la izquierda. Usando el comando **Circle** dibuja la de la derecha

Nota. Observa que se puede rellenar la luna poniendo

cir1=Graphics[{GrayLevel[0],Disk [{ 0,0 },1,{-Pi/2,Pi/2}] }];
a=0.2; fi=ArcTan[1/a]; ra=Sqrt[1+ a^2];
cir2=Graphics[{GrayLevel [1],Disk [{-a,0},ra] }];
Show[{cir1,cir2},AspectRatio->Automatic]

2. Dibuja tres bolas iguales sobre una misma horizontal, la primera tangente a la segunda y la segunda a la tercera de modo que cada una sea mas oscura que la siguiente.

Podemos también pintar las figuras con otros colores a base de mezclar rojo (r), verde (g) y azul (b) en distintas proporciones contenidas entre 0 y 1, con el comando

RGBColor [**r** , **g** , **b**]

por ejemplo **RGBColor** [**1,0,0**] será rojo puro, **RGBColor** [**0,1,0**] será verde puro, etc . Así la figura

figu3 = Graphics [**{ { RGBColor**[**1,0,0**], **Rectangle** [**{ 0 , 0 }**, **{ 1 , 1 }**] **}**
{ RGBColor[**0,1,0**], **Rectangle** [**{ 1 , 1 }**, **{ 2 , 2 }**] **} }**]

da lugar en la representación

Show [**figu3, AspectRatio** − > **Automatic**]

a dos cuadrados rojo y verde unidos en el punto $(1, 1)$.

---

3. Hacer un mosaico 4×4 de baldosas cuadradas y colores verde y rojo.

4. Podemos usar el comando **Table** para generar varias figuras a la vez, por ejemplo

lisfigu = Graphics [**Table** [**Circle** [**{i,i }**,**Sqrt**[**2**]/**2**], **{i,1,3 }**]];
Show[**lisfigu,AspectRatio** − > **Automatic**]

Dibuja seis discos tangentes entre si, del mismo tamaño sobre la recta $y = -x$.

1.4. Práctica 4. Las listas y sus aplicaciones

Aunque ya nos han aparecido anteriormente vamos a volver a insistir sobre el concepto de lista en Mathematica. De un modo bastante impreciso podemos decir que una lista es un conjunto ordenado de elementos que se escriben entre llaves y separados entre si por comas. Por tanto si llamamos **dato-1, dato-2, ... dato-n** a dichos elementos y denotamos por **lista1** la lista con dichos datos, ésta tiene una estructura de la forma

lista1 = { dato-1 , dato-2 , ... , dato-n }

Los elementos de una lista pueden ser cualesquiera: números, personas, gráficos, funciones etc. Por ejemplo

lista1 = { Susana , Pilar , Juan , Ivan, Andrés }

lista2 = { 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 }

lista3 = { 2 x , 3 x^2 , 4 x^3 , 5 x^4 , 6 x^5 }

cir = Graphics [Disk [{ 0 , 0 }, 1] , AspectRatio → Automatic];
lista4 = { cir , cir , cir , cir }

En el primer caso tenemos una lista de nombres de personas, en el segundo de números, en el tercero de polinomios y en el último de figuras (en este caso todas iguales, pero pueden ser distintas).

Recordemos que para fabricar listas nos podemos ayudar a veces del comando **Table** cuya sintaxis es la siguiente:

Table [expresión, { i , i inicio , i final }]

Por ejemplo la **lista2** se puede fabricar con

Table [1 + 2 i , { i , 0 , 5 }]

la **lista3** con

Table [i *x^(i-1) , { i , 2 , 6 }]

y la **lista4** con

Table [**cir** , **{ i , 1 , 4 }**]

Para ver una lista en forma tabular (columna vertical) podemos usar el comando **TableForm**[**lista**]. Si es una lista de gráficos usando el comando **Show** [**GraphicsArray** [**lista4**]] aparecen los gráficos en horizontal.

También podemos formar listas de listas, por ejemplo si

la1 = { Pedro, Juan, Luisa, Pilar } ; **la2 = { Luisa, Pilar, Xuxa, Pedro }**

una lista de listas sería **lis1 = { la1, la2 }** , que podemos ver en forma tabular con el comando **TableForm**[**lista**], aunque en este caso los elementos de cada lista están en la misma horizontal.

Para fabricar listas de listas también se puede usar el comando **Table** con dos índices que llevan sus recorridos

Table [**expresión , { i , i-inicial , i-final }, { j , j-inicial, j-final }**]

Por ejemplo **Table** [**i+j, {i , 1 , 2 }, { j , 2 , 5 }**] fabrica

{ { 1+2,1+3,1+4,1+5 }, { 2+2, 2+3,2+4,2+5 }}

Ejercicio. Usando el comando **Table** fabrica las listas de listas que dan lugar a las siguientes tablas:

11	12	13
21	22	23
31	32	33
41	42	43

x	x^2	x^3
$2x$	$2x^2$	$2x^3$
$3x$	$3x^2$	$3x^3$

$\odot$	$\odot$	$\odot$	$\odot$	$\odot$
$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\odot$	$\odot$	$\odot$	$\odot$	$\odot$

$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$
$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$
$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$\sqcup$	$\sqcup$	$\sqcup$

Con una lista se pueden hacer operaciones cualesquiera que actúan elemento a elemento.

Ejemplos.

1. Practica las siguientes operaciones

Camisa de lista1
La camisa de lista1
lista1 Sobresaliente
lista1 Aprobado

Observa que la orden **frase lista1** añade la **frase** a cada elemento de la **lista1** y luego coloca por orden alfabético las palabras.
2. En el caso de listas con elementos numéricos se pueden realizar todo tipo de operaciones aritméticas, p.e. sea **lista2 = { 1 , 3 , 5 , 7 }** y calcula

lista2 * 2 , **lista2 + 4** , **Cos** [**lista2**],
Exp [**lista2**], **lista2^(12)** , **2^lista2**

En estos ejemplos vemos que al multiplicar por 2 una lista se multiplican por 2 cada uno de sus elementos. Análogamente para sumar un número, calcular una función como el coseno o la exponencial y las potencias. Pero si operamos dos listas de distinto tamaño se queja y da error por ejemplo

lista2 * { 2 , 4 } **lista2 + { 2 , 4 }**

Podemos operar listas del mismo tamaño y entonces se funciona elemento a elemento. Fíjate en los resultados de

lista2 + { 2, 4, 6, 8 } **lista2 * { 2, 4, 6, 8 }**

3. Mathematica nos devuelve el elemento que ocupa el lugar i de una lista poniendo **lista** [[**i**]]. Por ejemplo **lista2**[[**3**]] nos devuelve el número 5 porque es el tercer elemento de **lista2**. Si es una lista de listas el elemento (i,j) se obtendrá con **lista**[[**i,j**]].
4. Las listas se pueden operar como conjuntos de Matemáticas. Así la unión se realiza con el comando **Union**[**lista1, lista2, ...**].
La intersección con el comando **Intersection**[**lista1, lista2,...**].
El comando **Join**[**lista1, lista2, ...**] concatena los elementos de las listas dadas.

Vectores y Matrices
En Matemáticas las listas mas usadas son los vectores y las matrices que vienen dadas como listas de listas, es decir listas cuyos elementos son a su vez listas. Veamos algunos ejemplos:
1. Un vector fila de $\mathbb{R}^4$

(1 , 4, 9, 13) $\rightarrow$ **vf1 = { { 1, 4, 9, 13 } }**

2. Un vector columna de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{vc1} = \{\{\mathbf{1}\}, \{\mathbf{3}\}, \{\mathbf{5}\}\}$$

3. Una matriz de dos filas y tres columnas (observa que se almacena por filas)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{ma1} = \{\{\mathbf{1}, \mathbf{6}, \mathbf{8}\}, \{\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{9}\}\}$$

Análogamente para otras matrices de diferentes tamaños.

Recordemos que si tenemos un vector fila **vf1** el transpuesto coloca estos mismos elementos en columna y recíprocamente. Para hacer la transposición de vectores y matrices tenemos el comando **Transpose** [**.....**].

Mathematica siempre nos presentará los vectores o matrices en forma de listas de listas, pero si queremos verlos en la forma matricial habitual tenemos el comando **MatrixForm**[**.....**] Además el comando **Dimensions** [**......**] nos proporciona el tamaño de la matriz o vector correspondiente.

Insistiremos de nuevo que para fabricar vectores y matrices es muy útil usar el comando **Table**. Por ejemplo

(2,6,10,14,20) = **Table** [**2 + 4 *j , { j, 0 , 5 }**]

Practica con los siguientes ejemplos:

1. (-3,-1,1,3,5,7,9), (2,-4,6,-8,10,-12,14), (1,2,5,10,17,26).

2. La matriz de Hilbert de cuarto orden

$$H_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

En este caso

hilbert4 = Table [**1/(i+j-1), { i , 1 , 4 }, { j , 1 , 4 }**].

Ejercicios. Usando el comando **Table** escribe las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} \\ \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3^2} & \frac{1}{3^3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4^2} & \frac{1}{4^3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \frac{1}{4^2} \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{3^3} & \frac{1}{4^3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{1} & \frac{2^2}{3} & \frac{2^3}{5} \\ \frac{3}{3} & \frac{3^2}{5} & \frac{3^3}{7} \\ \frac{4}{5} & \frac{4^2}{7} & \frac{4^3}{9} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & 7 & 7^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \\ a^6 & a^7 & a^8 & a^9 & a^{10} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{3}{b} & \frac{4}{b^2} & \frac{5}{b^3} \\ \frac{3}{b^2} & \frac{4}{b^3} & \frac{5}{b^4} \\ \frac{3}{b^3} & \frac{4}{b^4} & \frac{5}{b^5} \end{pmatrix},$$

1.5. Práctica 5. Matrices y vectores

En la clase de teoría se comenta que las matrices y los vectores son unas herramientas muy útiles para el estudio de muchos problemas matemáticos: por ejemplo la resolución de sistemas lineales y el cálculo de valores–vectores propios. En esta práctica indicaremos varias órdenes para usar estos elementos con Mathematica.

En lo sucesivo, al hablar de operaciones entre matrices, consideraremos los vectores fila de m componentes como matrices del tipo $(1 \times m)$ y a los vectores columna de n componentes como matrices del tipo $(n \times 1)$ y una matriz de m filas y n columnas diremos que es del tipo $(m \times n)$.

Llamaremos matrices reales (respectivamente complejas) a aquellas cuyos elementos son números reales (respectivamente números complejos). Cuando una matriz tiene el mismo número de filas que columnas ($= n$) se llama una matriz cuadrada de orden n.

Respecto a las notaciones, es habitual en la literatura matemática emplear letras mayúsculas ($A, B, C, \ldots$) para denotar las matrices y letras minúsculas, a veces en negrita, para denotar los vectores $(u, v, \ldots)$. En estas prácticas, como los comandos de Mathematica comienzan por mayúsculas, cambiaremos algo las notaciones y pondremos:

- **maA, maB, ...** para las matrices $A, B, \ldots$.
- **vfilu, vfilv, ...** para los vectores fila $u, v, \ldots$.
- **vcolu, vcolv, ...** para los vectores columna $u, v, \ldots$

Recordemos que en Mathematica toda matriz (de cualquier tamaño), y en particular los vectores fila y columna, se representa como una lista de listas.

Si en una matriz **maA** del tipo $(m \times n)$ todo elemento de lugar (i, j) está dado por una fórmula $f(i, j)$ de las dos variables i, j, podemos generar fácilmente dicha matriz con los comandos **Table** y **Array**. En efecto, supuesta definida la función f en la forma habitual **f[i_, j_] = ...**, cualquiera de las órdenes

Table [f[i , j], {i , 1 , m }, {j, 1, n }], o **Array [f, {m , n }]**

sirven para generar la matriz.

Ejemplos.
1.) Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2/10 & 3/10 & 4/10 & 5/10 \\ 3/10 & 4/10 & 5/10 & 6/10 \\ 4/10 & 5/10 & 6/10 & 7/10 \end{pmatrix}$$

como el elemento (i, j) está dado por la fórmula $(i + j)/10$ pondríamos

f1 [i_ , j_] = (i+j)/10 ; maA = Array [f1 , { 3 , 4 }] ; MatrixForm[maA]

nos daría lugar a la matriz anterior.

2.) Para la matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 & 19 \\ 21 & 23 & 25 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+5 & 0+7 & 0+9 & 0+11 \\ 8+5 & 8+7 & 8+9 & 8+11 \\ 16+5 & 16+7 & 16+9 & 16+11 \end{pmatrix}$$

Observa que las filas se diferencian en múltiplos de 8: $8(i-1), i = 1, 2, 3$ y las columnas empiezan en 5 y van de 2 en 2: $(2j + 3), j = 1, 2, 3, 4$. Entonces la función correspondiente sería **f2 [i_ , j_] = 8 (i - 1) + 2 j + 3** y las órdenes son completamente análogas al ejemplo anterior.

3.) Para matrices triangulares (o otras que tengan bastantes ceros) tenemos el comando **If** . Por ejemplo para la matriz triangular superior

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 0 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

vemos que $f(i, j) = 0$ si $i > j$ y $f(i, j) = 1/(i+j)$ en los otros casos. Entonces ponemos

f3 [i_ , j_] = If [i > j , 0 , 1 / (i + j)]; maC = Array [f3 , { 4 , 4 }]

Observa que la estructura del comando **If** es:

If [*"condición"* , *"proceso 1"* , *"proceso 2"*] donde la *"condición"* es del tipo lógico, de manera que si se cumple dicha condición se va al *"proceso 1"* y si no se cumple se va al *"proceso 2"*.

Ejercicios.
1.) Define las siguientes matrices usando los comandos **If, Table, Array**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 0 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 3/4 & 4/5 \\ 4/5 & 5/6 & 6/7 & 7/8 \\ 7/8 & 8/9 & 9/10 & 10/11 \\ 10/11 & 11/12 & 12/13 & 13/14 \end{pmatrix}.$$

Hay otra orden mas general que la orden **If** para el caso de varias condiciones. Es la siguiente:

Which [cond1, proc1, cond2, proc2, ... , True, procn]

de manera que si se verifica la condición 1, Math. ejecuta el proc1., si se verifica la cond2, ejecuta el proceso 2 y así sucesivamente y por último si no se verifican ninguna de las condiciones ejecuta el proceso n.

Supongamos que queremos introducir la matriz 10×10 de la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ -5 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 5 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

que tiene la diagonal principal con 2, la paralela por encima con 5 y la de debajo con -5, podríamos

f3[i_, j_] = Which [i == j , 2 , i+1 ==j , 5 , i-1 == j , -5 , True , 0];
ma3 = Array [f3 , { 10 , 10 }]

Nota. Observa que la misma función se puede también fabricar con varios comandos **If** encajados, pero sería mas complicado ya que deberíamos poner

f3[i_, j_] = If [i==j , 2 , If [i==j-1 , 5 , If [i==j+1 , -5 ,0]]]

Ejercicio. Usando los comandos **Which y Array** representa las matrices cuadradas de orden 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 5 & & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 3 & 5 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & & 3 & 1 \\ 0 & \dots & & 3 & 1 & 5 \\ \vdots & & 3 & 1 & 5 & 0 \\ & 3 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 5 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En Mathematica hay algunos comandos específicos para definir matrices cuadradas especiales: Para matrices cuadradas diagonales, es decir con todos elementos nulos salvo los de la diagonal principal $a, b, c, \dots$ tenemos **DiagonalMatrix** [**{ a, b, c, ... }**] . Por ejemplo

$$\mathbf{DiagonalMatrix}[\{\mathbf{1}, \mathbf{7}, \mathbf{9}\}] \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Para la matriz identidad de orden m (matriz diagonal con todos elementos diagonales unidad) el comando a usar es **IdentityMatrix** [**m**].

Recordemos ahora las principales operaciones entre matrices:

<u>Trasposición:</u> Si **maA** es una matriz del tipo $(m \times n)$ la matriz traspuesta de **maA** es una matriz del tipo $(n \times m)$ que resulta al cambiar en la anterior las filas en columnas y se obtiene mediante el comando **Transpose** [**maA**].

En el caso particular de que la matriz a trasponer es el vector fila **vfil** = **{ { 1 , 3 , 5 , 7 } }** que es del tipo (1×4) tiene por traspuesto el vector columna

vfiltra = Transpose [**vfil**] $\quad \rightarrow \quad$ **{ { 1 } , { 3 } , { 5 } , { 7 } }**

que es del tipo (4×1).

Producto de una matriz por un número: Dada una matriz **maA** del tipo $(m \times n)$, (el número de filas y columnas puede ser cualquiera) y un número a el producto **a maA** o bien **maA a** es otra matriz del tipo $(m \times n)$, cuyos elementos son **a maA** [[**i** , **j**]] .

Suma: Si **maA** = **maA**[[**i** , **j**]] y **maB** = **mbB**[[**i** , **j**]] son dos matrices del mismo tamaño la suma **maA** + **maB** es otra matriz del mismo tamaño que se obtiene sumando los términos elemento a elemento, p.e. para sumar

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4i+5 & 6 \\ 5i-2 & 2i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4i+7 & 7 \\ 5i-1 & 2i+2 \end{pmatrix}$$

pondríamos

maA = { { 2 , 1 }, { 1 , 2 } };   maB= { { 4 I + 5 , 6 }, { 5 I - 2 , 2 I } } ;

y la suma se escribiría **maA + maB** .

Producto de matrices: Si **maA** es del tipo $(m \times n)$ y **maB** es del tipo $(n \times p)$ es decir el número de columnas de **maA** es igual que el número de filas de **maB**. El producto **maA . maB** es una matriz **maC** del tipo $(m \times p)$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{maA} & . & \mathbf{maB} & = & \mathbf{maC} \\ (m \times n) & & (n \times p) & & (m \times p) \end{array}$$

de tal manera que el elemento (i, j) de la matriz producto **maC** está dado por la fórmula

$$\mathbf{maC}[[\mathbf{i},\mathbf{j}]] = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{maA}[[\mathbf{i},\mathbf{k}]] \quad \mathbf{maB}[[\mathbf{k},\mathbf{j}]]$$

por tanto, el elemento (i, j) de la matriz producto se obtiene multiplicando término a término la fila i-ésima de A por la columna j-ésima de B y sumando los productos.

Conviene insistir en que el producto de matrices se indica en Mathematica colocando un punto decimal entre ambas. Por ejemplo, si queremos multiplicar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

En primer lugar nos fijamos si A y B son multiplicables. Vemos que A es del tipo (3×3) y B es del tipo (3×2), luego en efecto A es multiplicable por B y el resultado será del tipo (3×2). Ahora para efectuar el producto pondremos:

maA= { { 1 , 4 , 5 }, { 6 , 3, 1 }, { 1 , 2 , 1 } };
maB = { { 1 , 2 }, { 1 , 2 }, { 1 , 2 } };

maA · maB ; **MatrixForm** [%] $\rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 20 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Nota que el punto decimal no se puede sustituir por una estrella como en el producto de números. Cuando se coloca una estrella entre dos matrices Mathematica multiplica elemento a elemento en el caso de que las dos matrices tengan el mismo tamaño, p.e.

{ { 1 , 2 }, { 3 , 4 } } * { { 2 , 4 } , { 6 , 8 } } → **{ { 2 , 8 }, { 18 , 32 } }**

Una observación importante es que el producto de matrices en general no es conmutativo. En primer lugar puede ocurrir que A sea multiplicable por B pero que B no sea multiplicable por A (en un ejemplo anterior A es del tipo (3×3) y B es del tipo (3×2), luego B no es multiplicable por A). Pero además de esto, incluso siendo multiplicables, el resultado del producto puede depender del orden. Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

son multiplicables de las dos maneras pero los resultados son diferentes como puedes ver fácilmente.

<u>Potencias de matrices:</u> Dada una matriz cuadrada A podemos calcular $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$ etc . La orden para producir la potencia n–ésima de **maA** es **MatrixPower** [**maA , n**]

<u>Determinantes:</u> Dada una matriz cuadrada **maA**, Mathematica nos da su determinante con la orden **Det** [**maA**] .

<u>Inversas:</u> Si una matriz cuadrada A tiene su determinante $\neq 0$, sabemos que existe otra matriz A^{-1} llamada matriz inversa de A tal que

$$A^{-1}\, A = A\, A^{-1} = I \text{ (matriz unidad)}$$

donde I tiene 1 en los elementos diagonales y cero en los restantes. En Mathematica para calcular la inversa de **maA** tenemos el comando **Inverse** [**maA**] .

Ejercicios.
1.) Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$
Calcula $\det(A\ A^T)$ y $\det(A^T\ A)$.

2.) Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calcula el polinomio de tercer grado $p(z) = \det(zI - A)$.
2. Supuesto que $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$, calcula $A^3 + aA^2 + bA + cI$ donde I es la matriz unidad de orden 3.
3. Calcula $\det A$ y $\det(A^{-1}$. ¿Qué relación hay entre el determinante de una matriz y el de su inversa?.
4. Repite el ejercicio anterior para la matriz de Hilbert de orden cuatro.

3.) Se dice que una matriz cuadrada real A es ortogonal si $A\ A^T = A^T\ A = I$ es decir si es invertible y su inversa coincide con su traspuesta. Comprueba que
$$A = \begin{pmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$
es ortogonal. Comprueba que los vectores fila de A son ortogonales entre si y que lo mismo ocurre para los vectores columna (Notar que **maA**[[**i**]] es el la fila i–ésima de la matriz A y que el producto escalar de dos vectores u y v se puede realizar con la orden **u . v**).

4.) Calcula números reales a, b y c de modo que la matriz
$$\begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ a & b & c \end{pmatrix}$$
sea ortogonal.

1.6. Práctica 6. Resolución de sistemas lineales

Dado un sistema de ecuaciones lineales, p.e. el siguiente sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= 23 \end{aligned} \tag{1.1}$$

podemos usar las siguientes matrices para escribirlo en forma compacta

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 6 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad (\text{ matriz de los coeficientes })$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \text{vector columna de} \\ \text{las incógnitas} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 23 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \text{vector columna de} \\ \text{los términos independientes} \end{pmatrix}$$

el sistema (1.1) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

que es la forma matricial del sistema (1.1).

Recordemos que un sistema lineal se dice

- **Incompatible:** Si no tiene ninguna solución.
- **Compatible:** Si tiene al menos una solución.
- **Compatible Determinado:** Tiene solución única.
- **Compatible Indeterminado:** Tiene infinitas soluciones.

En Mathematica para resolver el sistema lineal **maA . x == vcolb** tenemos el comando **LinearSolve** cuya sintaxis es:

$$\mathbf{x} = \textbf{LinearSolve [maA , vcolb]}$$

donde **maA** es la matriz de coeficientes del sistema t **vcolb** el vector columna de los términos independientes, y actúa de la siguiente forma:

- Si el sistema es incompatible nos contestará diciendo que no existe solución.
- Si el sistema es compatible nos dará una solución (aunque pueden existir infinitas).

Por tanto en este último caso nos queda la duda de si será determinado (una sola solución) o indeterminado (infinitas soluciones).

Para aclarar la situación podemos proceder mirando el espacio nulo (también llamado el núcleo) de la matriz **A**, es decir el vector o vectores independientes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$ tales que $\mathbf{A}\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{A}\ \mathbf{v} = \mathbf{0}, \ldots$. Esto se consigue con la orden

NullSpace [maA]

que nos da los vectores fila del espacio nulo de **A**.

Si la respuesta es que no hay ningún vector en el núcleo (o espacio nulo) de **A** la solución es única.

Si la respuesta es que hay uno o varios vectores independientes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$ en el núcleo de **A**, entonces hay infinitas soluciones que dependen de tantos parámetros como vectores y tienen la forma

xsol = resultado de **LinearSolve** [**maA, vcolb**]

+ **p1 *** primer vector de **NullSpace**[**maA**]

+ **p2 *** segundo vector de **NullSpace**[**maA**]

. . . . .

donde se han llamado **p1**, **p2 ...** los parámetros independientes.

Ejemplo: En el sistema lineal (1.1) primero introducimos los datos

maA = ...   **x = ...**   **vcolb = ...**

Resolvemos

x = LinearSolve[maA, vcolb] $\rightarrow$ **{ { 367/8 }, {-(7/8) }, {-(87/4) }, { 0 } }**

Por tanto ya sabemos que es compatible. Para saber si es determinado o indeterminado

NullSpace [maA] $\rightarrow$ **{ {-321,17,170,8 } }**

entonces en el núcleo hay un solo vector independiente y el conjunto de soluciones de (1.1) es

xsol = x + p1 * Transpose [%] =
{ { 367/8 - 321 p1 }, { (-7/8) + 17 p1 }, { -(87/4) + 170 p1 }, { 8 p1 } }

Ejercicios:
1. Estudia la compatibilidad y en caso afirmativo resuelve los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{c} 3x_2-4x_3+(5/3)x_4=(23/12) \\ 2x_1+7x_2+(4/3)x_3+3x_4=(41/4) \\ (1/2)x_1-3x_2+2x_3+(13/3)x_4=(41/12) \\ (7/6)x_1+(7/3)x_2-(14/9)x_3+7x_4=(35/4) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1+7x_2+11x_3-3x_4=41 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+5x_4=12 \\ 6x_1+3x_2-49x_3+2x_4=34 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1+7x_2+11x_3-3x_4=41 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} 2x_1+3x_2+3x_3-2x_4=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 4x_1+7x_2+5x_3-4x_4=12 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{array}{c} x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_2+2x_3-x_4=2 \\ x_3+2x_4-x_5=3 \\ 6x_4-8x_5=4 \\ x_1+2x_2-3x_5=4 \end{array}\right\}$$

2. Calcula, en forma paramétrica, el conjunto de soluciones del sistema lineal

$$x_1-x_2+2x_3-2x_4=0,\ 3x_1+x_2+5x_3+7x_4=0,\ 6x_1+3x_2+2x_3+x_4=12,$$

Entre todas las soluciones determina geométricamente la solución cuya distancia al origen es mínima (recuerda que el cuadrado de la distancia al origen es:$d^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$).

Otra posibilidad para resolver sistemas de ecuaciones (que pueden ser lineales o no lineales) es usar el comando " **Solve** " . Por ejemplo, en el caso del sistema (1.1), si definimos: **maA** la matriz **A**, **u** el vector columna de las incógnitas, **vcolb** el vector columna **b**, la orden

Solve [maA . u == vcolb]

nos daría:

Equations may not give solutions for all "solve" variables.
{{u1 → 367/8 - (321 u4)/8, u2 → -(7/8) + (17 u4)/8,
u3 → -(87/4) + (85 u4)/4 } }

indicando que este sistema tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro que ha elegido **u4** . Entonces las restantes incógnitas se expresan en función de dicho parámetro.

Se puede ver que esta forma de expresar la solución es equivalente a la anterior y, dependiendo de la aplicación, podrá convenir usar una u otra forma (observa que si se pone **u4 = 8 p1** y se sustituye en las restantes ecuaciones se recupera la misma solución que en el caso anterior).

El teorema de Rouché–Frobenius

Este importante teorema sirve para decidir si un sistema es o no compatible y nos dice

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ es compatible} \Longleftrightarrow \text{rango } \mathbf{A} = \text{rango}[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$$

Esta última matriz se llama matriz ampliada. Además, si rango **A** es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado (solución única), y si no son iguales el conjunto de soluciones depende de p parámetros donde p es el número de incógnitas menos el rango de **A**.

Si queremos calcular el rango de una matriz, Mathematica no tiene un comando específico que lo calcule, sin embargo podemos proceder indirectamente: Sabemos por Álgebra Lineal que hay una fórmula que nos dice que el rango de una matriz es igual al número de columnas menos el número de vectores independientes de su núcleo (o espacio nulo de la matriz). Entonces, para una matriz $\mathbf{A}$ se puede escribir

$$\text{rango } \mathbf{A} = \text{ número cols de } \mathbf{A} - \mathbf{Length}[\mathbf{NullSpace}[\mathbf{A}]]$$

Podemos repetir el proceso con la matriz ampliada y de esta manera ver la verificación de las hipótesis del Teorema de Rouché-Frobenius.

Ejemplo

Estudia la compatibilidad de los sistemas

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = -1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 2 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = -2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 1 \end{array}\right\}$$

Problemas geométricos

1. Se trata de inscribir en una circunferencia de radio unidad cuatro circunferencias iguales tangentes dos a dos tal como se indica en la figura

Suponiendo que la circunferencia grande tiene su centro en el origen, calcula (razonadamente) el radio y los centros de las circunferencias pequeñas y dibuja la figura correspondiente.

2. Se trata de hacer lo mismo que en el problema anterior pero ahora con seis circunferencias tal como se ve en la figura

3. Ahora tenemos seis circunferencias de radio unidad tangentes como se ve en la figura. Si la del centro de la base tiene su centro en el origen de coordenadas ¿ donde estarán los centros de las restantes?

1.7. Práctica 7. Interpolación polinómica

El problema esencial en la teoría de interpolación consiste en aproximar una función usando información acerca de dicha función en uno o varios puntos. En el caso mas simple las funciones aproximantes son polinomios y entonces se dice que la interpolación es de tipo polinómico.

Dependiendo de la información que se tenga sobre la función tenemos distintos problemas de interpolación. Veremos los casos mas conocidos:

Interpolación polinómica de Taylor

Aquí la información es el valor de una función f y sus derivadas hasta un cierto orden en un punto prefijado $x = a$. Por tanto los datos de éste problema son:

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots, f^{(k)}(a).$$

y el polinomio de interpolación con estos datos se llama el polinomio de Taylor de orden k en el punto $x = a$ que está dado por la fórmula

$$P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

Ejemplo. Calculamos el polinomio de interpolación de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$ en el punto $a = \pi/2$.

Llamando **f1 , f2, ...** las derivadas sucesivas de la función **f** pondremos:

```
a = Pi / 2 ; f[ x_ ] = x * Sin [ x ];
f1[x_] = D[f[x],x] ;
f2[x_] = D[f1[x],x];      ( = D [ f [ x ], {x , 2 } ] )
f3[x_] = D[f2[x],x] ;     ( = D [ f [ x ], {x , 3 } ] )
f4[x_] = D[f3[x],x];      ( = D [ f [ x ], {x , 4 } ] )
```

y entonces el polinomio de Taylor de orden cuatro será

tay4[x_] = f[a] + (f1[a]) (x-a) + (f2[a]/ 2!) (x-a)^2+

(f3[a]/ 3!) (x-a)^3 + (f4[a]/ 4 !) (x-a)^4

Podemos comparar gráficamente la función $f(x)$ con su polinomio de interpolación de Taylor **tay4 [x]** en un entorno del punto $x = a$ (por ejemplo en el entorno $(a - 0.5, a + 0.5)$) con la orden

Plot[{ f[x], tay4[x] } , { x, a - 2, a+ 2 }, PlotStyle $- >$

{ RGBColor[1 , 0 , 0], RGBColor [0, 0, 1] },

AspectRatio $- >$ **Automatic**]

La orden **RGBColor** [**...**] se ha usado para dar colores distintos a las funciones que se van a comparar. En este caso la primera es de color rojo y la segunda azul.

Vemos que cerca del punto a las gráficas de las dos funciones casi coinciden, sin embargo si nos alejamos las funciones ya son muy distintas. Esta situación es bastante general, la aproximación del polinomio de Taylor es buena en un entorno generalmente pequeño alrededor del punto considerado pero si nos alejamos se estropea rápidamente.

Podemos usar otra orden para distinguir dos funciones que aparecen en un mismo gráfico con la orden **Dashing** [**{ d }**] que sirve para dibujar un gráfico discontinuo, de tal manera que para $d = 0$ es continuo, y para $d > 0$ cada vez mas grandes es mas discontinuo. Por ejemplo con

Plot [**{f[x],ptay[x]},{x,a-2,a+2 },PlotPoints** $- >$ **40,**

PlotStyle $- >$ **{Dashing [{0.008}],Dashing [{ 0 }] }**]

se obtendría la figura

donde hemos representado con trazo discontinuo la función dada $f(x)$ y con trazo continuo el polinomio de aproximante $ptay(x)$.

Podemos calcular con Mathematica el polinomio de Taylor de forma mas general para que sirva para cualquier orden k.

Hacemos primero una limpieza general y cargamos los datos del problema anterior

Clear [" Global`* "]; f [x _]= x * Sin [x] ; a = Pi / 2 ; k = 4 ;

(aunque hemos puesto $k = 4$ se puede elegir cualquier otro valor).

Ahora la función y sus derivadas hasta orden $k = 4$ las metemos en una lista que llamamos p.e. **coef** con la orden **Table**

coef = Table [D [f [x] , { x , i }] /. x − > a , { i , 0 , k }]

El polinomio Taylor de orden k, usando la sigma, se puede poner en la forma

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = \sum_{i=0}^{k} (\ \textbf{coef}\ [[\mathbf{i+1}]]\ /\ \mathbf{i}\ !\ )\ (\ \mathbf{x - a}\ )^i$$

Para llevarlo a Mathematica tenemos la orden **Sum**

tay4 [x_] = Sum [(coef [[i+1]] / i !) (x - a)^i **, { i , 0 , k }]**

Ejercicios.

1.) Calcula el polinomio de Taylor $p(x)$ de orden 20 de la función $f(x) = \text{sen}(x^2)$ en el punto $x = 0$. Se llama error de interpolación la diferencia entre la función que se aproxima $f(x)$ y su polinomio de interpolación, y se puede expresar en la forma $err(x) \equiv |f(x) - p(x)|$. Estudia gráficamente el máximo intervalo alrededor de $x = 0$, en el cual el error de interpolación es menor o igual que una milésima.

2.) Calcula el polinomio de Taylor $p(x)$ de orden 10 de la función $f(x) = \cos(x^2/(1 + x^2))$ en el punto $x = 0$. Estudia gráficamente en qué intervalo alrededor de $x = 0$ el polinomio proporciona una buena aproximación de la función. Calcula aproximadamente el punto mas próximo al origen en el cual el error de interpolación $|f(x) - p(x)|$ es 0.1.

3.) Calcula el polinomio de Taylor $p(x)$ de orden 15 de la función $f(x) = e^{(x/(1+x^2))}$ en el punto $x = 0$. Estudia gráficamente en qué intervalo alrededor de $x = 0$ el polinomio $p(x)$ aproxima a la función dada con error $\leq 10^{-3}$.

Interpolación polinómica de Lagrange

En este problema los datos de interpolación son los valores de la función $f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2), \ldots, f_n = f(x_n)$ en un conjunto finito de n valores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que se llaman **nodos de interpolación**.

Se demuestra en la teoría que con estos n datos existe un único polinomio $p(x)$ de grado $\leq (n-1)$ tal que

$$p(x_1) = f_1,\ p(x_2) = f_2,\ \ldots, p(x_n) = f_n.$$

Aunque el polinomio de interpolación es único se puede escribir de varias formas. En la forma de Lagrange tenemos la expresión

$$p(x) = L_1(x)\ f_1 + L_2(x)\ f_2 + \ldots + L_n(x)\ f_n,$$

donde $L_j(x)$ son los polinomios básicos de Lagrange en los nodos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dados por

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}, \quad L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}, \ldots$$

Respecto a la forma de estos polinomios, observa que en el primer polinomio básico de Lagrange $L_1(x)$ tenemos:

- en el numerador el producto de todos los monomios $(x - x_j)$ salvo $(x - x_1)$ (del mismo subíndice que $L_1(x)$)
- el denominador es el mismo numerador con $x \to x_1$.

Análogamente para los restantes $L_j(x)$.

Introduciendo el llamado polinomio nodal

$$pnod(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

tenemos que para cualquier $L_j(x)$

$$\text{Numerador } (L_j(x)) = \frac{pnod(x)}{(x-x_j)}$$

$$\text{Denominador } (L_j(x)) = \text{ Numerador } (L_j(x)) \ /.\ x \to x_j$$

Ejemplo. Calcularemos el polinomio de Lagrange correspondiente a los datos

$$(x_i, f_i) = (0,1), (1,1/2), (2,1/3), (3,1/4).$$

En este caso introduciremos los cuatro datos en dos listas, la lista **xd** para los valores de las x_i y la lista **fd** para los valores de la función.

xd = { 0,1,2,3 } ; fd = { 1 , 1/2 , 1/3 , 1/4 }

A continuación introducimos el polinomio nodal bien directamente o con la orden **Product**

pnod [x_] = Product [(x - xd [[j]]) , { j , 1 , 4 }]

los cuatro polinomios básicos de Lagrange que llamaremos **la1** hasta **la4** serán

n1[x_] = pnod[x] / (x - xd [[1]]);

la1[x_] = n1 [x] / (n1 [x] /. x − > xd [[1]]);

n2[x_] = pnod[x] / (x - xd [[2]]);

la2[x_] = n2 [x] / (n2 [x] /. x − > xd [[2]]);

n3[x_] = pnod[x] / (x - xd [[3]]);

la3[x_] = n3 [x] / (n3 [x] /. x − > xd [[3]]);

n4[x_] = pnod[x] / (x - xd [[4]]);

la4[x_] = n4 [x] / (n4 [x] /. x − > xd [[4]]);

resultando el polinomio de Lagrange

pLag [x_] = la1[x]* fd [[1]] + la2[x]* fd [[2]] +la3[x]* fd [[3]] + la4[x]* fd [[4]]

podemos simplificarlo con

Simplify [%] $\rightarrow (1/24)(24 - 18x + 7x^2 - x^3)$

Vamos a dar una expresión mas compacta que se pueda usar con cualquier número de datos.

Empezaremos como siempre con una limpieza general e introduciendo los datos

Clear [“ Global‘* ”]; xd = { x1 , x2, ... , xn } ; fd = { f1 , f2 , ... fn } ;

seguidamente formamos el polinomio nodal $pn(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ con la orden **Product** en la forma

pn [x_] = Product [(x - xd[[i]]) , { i , n }]

Observamos ahora que el numerador de cada $L_i(x)$ es $pn(x)/(x - x_i)$ y que el denominador correspondiente es igual que el numerador pero con $x \to x_i$. Entonces generaremos los polinomios básicos de Lagrange en una lista **lagrange** con la orden **Table**

lagrange = Table [(pn [x] / (x - xd [[i]]))/ ((pn [x] / (x - xd [[i]]))/. x − > xd[[i]]), { i , 1 , n }]

y finalmente el polinomio de Lagrange será

pLag [x_] = Sum [lagrange [[i]] * fd [[i]], { i , 1 , n }]

Ejercicios

1.) Calcula en forma simplificada los polinomios de Lagrange correspondientes a la tabla de datos:

x_i	0	1/2	-1/2	1	-1	2	-2	3	-3
f_i	1	17/16	17/16	2	2	17	17	82	82

2.) Calcula en forma simplificada los polinomios de interpolación de Lagrange de $f(x) = \text{sen}(x^2)$ en 5, 11 y 17 puntos igualmente espaciados en el intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$.

Compara gráficamente la función $f(x)$ con los polinomios de interpolación anteriores en el citado intervalo. ¿ qué parece deducirse de lo anterior ?.

3. Calcula los polinomios de interpolación, correspondientes a las siguientes tablas de datos:

x_i	0	1	2	3	-1	-2	- 3
f_i	2	4	6	8	-4	-6	- 8

x_i	1	2	3	-1	-2	-3	0
f_i	4	6	8	-4	-6	-8	2

Simplifica los dos polinomios y compara los resultados.

En el problema de interpolación de Taylor los datos de interpolación son el valor de la función y varias derivadas sucesivas en un mismo punto. Por otro lado en el problema de interpolación de Lagrange los datos son los valores de la función en varios puntos distintos. Seguidamente consideraremos un problema que engloba a los dos anteriores en el sentido de que los datos son valores de la función y derivadas en varios puntos.

Problema de interpolación de Hermite

Dados los datos de interpolación

$$f(x_1), f'(x_1), \ldots, f^{(k_1)}(x_1), \qquad (k_1+1) \text{ datos en } \ x_1$$

$$f(x_2), f'(x_2), \ldots, f^{(k_2)}(x_2), \qquad (k_2+1) \text{ datos en } \ x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_n), f'(x_n), \ldots, f^{(k_n)}(x_n), \qquad (k_n+1) \text{ datos en } \ x_n$$

en el problema de interpolación de Hermite, se trata de encontrar un polinomio $H(x)$ (llamado polinomio de interpolación de Hermite) de grado menor o igual que el número total de datos menos uno

$$(k_1+1) + (k_2+1) + \ldots + (k_n+1) - 1$$

tal que

$$H(x_1) = f(x_1),\ H'(x_1) = f'(x_1),\ \ldots, H^{(k_1)}(x_1) = f^{(k_1)}(x_1),$$

$$H(x_2) = f(x_2),\ H'(x_2) = f'(x_2),\ \ldots, H^{(k_2)}(x_2) = f^{(k_2)}(x_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H(x_n) = f(x_n),\ H'(x_n) = f'(x_n),\ \ldots, H^{(k_n)}(x_n) = f^{(k_n)}(x_n).$$

Hay fórmulas matemáticas que definen la expresión del polinomio de Hermite $H(x)$ que cumple las condiciones anteriores, pero son complicadas y puesto que Mathematica tiene el comando **“ InterpolatingPolynomial ”** para calcular dicho polinomio nos limitaremos a indicar como usarlo.

Supongamos que los datos en tres nodos x_0, x_1, x_2 son los indicados en la tabla siguiente:

x_0	x_1	x_2
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	$f'(x_2)$
$f''(x_0)$		$f''(x_2)$

Preparamos una lista de listas de datos en la siguiente forma:

**datos= { { x0 , { f0 , fp0, fs0 } } ,
{ x1 , { f1 , fp1 } }, { x2 , { f2 , fp2, fs2 } } }**

entonces

h [x _] = InterpolatingPolynomial [datos , x]

nos da el polinomio de interpolación de Hermite correspondiente a dichos datos.

Recordemos también que, además de la orden **Simplify**, la orden **Collect [h [x] , x]** nos ordena $h(x)$ en potencias de x.

Ejercicios.

1.) Calcula los polinomios de interpolación de Hermite correspondientes a los siguientes datos

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
-1	3	-3	4
0	1	0	
1	3	-3	4

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	$f'''(x_i)$
-1	3	4.2	4.8	5
0	1	1.1	3	
1	3	4.4	4.8	6

2.) Calcula el polinomio de interpolación de Hermite de $f(x) = 1/(1+x^2)$ correspondiente a los siguientes datos:

$x_1 = -2$	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$f''(x_1)$
$x_2 = -1$	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	
$x_3 = 0$	$f(x_3)$	$f'(x_3)$	

1.8. Práctica 8: Interpolación con funciones spline

La interpolación polinómica tiene propiedades muy agradables. Pensemos por ejemplo que los polinomios son cómodos de manejar en derivaciones, integraciones y otras operaciones algebraicas. Sin embargo los polinomios de grado alto son muy oscilantes y eso hace que la aproximación polinómica de ciertas funciones con polinomios de orden alto no nos de la precisión esperada. Veamos un ejemplo: Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{1+20x^2}, \qquad \text{en el intervalo } [-1,1]$$

que es simétrica respecto al eje OY , en $x = 0$ vale 1 y tiende monótonamente a cero cuando x se hace grande.

Por ejemplo, el polinomio de Taylor de orden 6 en el origen es

$$ptay6(x) = 1 - 20.\ x^2 + 400.\ x^4 - 8000.\ x^6$$

y el error de interpolación alrededor del origen tiene la forma

Se aprecia que dicho error crece muy rápidamente cuando nos alejamos del origen, p.e. para $x = 0.3$ su valor es de casi 3 unidades y para $x = 1$ es, aproximadamente, $\simeq 7619$.

Si aumentamos el grado del polinomio de Taylor el error de interpolación, al alejarnos del origen, todavía aumenta, por ejemplo para el polinomio de Taylor de orden 12

$$ptay12(x) = 1-20.\ x^2+400.\ x^4-8000.\ x^6+160000.\ x^8-3.2*10^6\ x^{10}+6.4*10^7\ x^{12}$$

tenemos la gráfica

por ejemplo para $x = 0.3$, alcanza el valor 21.865 y para $x = 1$ llega a valer $6.0952381 \; * 10^7$.

Si consideramos un aproximante de tipo Hermite en el intervalo $[0, 1]$ con objeto de "sujetar" la función en los dos extremos del intervalo, la situación mejora mucho pero los errores pueden ser también demasiado grandes. Por ejemplo, si tomamos el interpolante Hermite con los datos

$$\{\text{en } x = 0,\ f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ f'''(0)\} \qquad \{\text{en } x = 1,\ f(1),\ f'(1),\ f''(1),\ f'''(1)\}$$

se obtiene el polinomio de interpolación

$$H(x) = 1 - \frac{20x^2(194481 - 1641620x^2 + 3168000x^3 - 2319600x^4 + 608000x^5)}{194481}$$

la gráfica del interpolante de Hermite $H(x)$ y la función aproximante $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ resultan

Se aprecia que el interpolante (trazo continuo) toma incluso valores negativos en el intervalo mientras que la función aproximante (trazo discontinuo) es siempre positiva.

Ante esta situación los expertos en el tema han propuesto aproximar una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ dividiendo el intervalo grande en varios subintervalos mas pequeños que tienen como extremos los puntos

$$a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

y considerar en cada subíntervalo $[t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$ un polinomio de interpolación de orden bajo con condiciones de continuidad en los puntos de empalme. Este tipo de aproximación se llama aproximación polinómica segmentaria y las funciones polinómicas a trozos funciones spline (trazador) ya que están asociadas a un instrumento de diseño gráfico conocido desde hace mucho tiempo con éste nombre.

Hay muchos tipos de funciones spline, nosotros trabajaremos aquí con el spline cúbico de frontera ligada que pasamos a definir a continuación:

Dada una partición del intervalo $[a, b]$

$$a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

nos da lugar a los subintervalos

$$[t_1, t_2],\ [t_2, t_3],\ \ldots, [t_{n-1}, t_n].$$

Entonces un spline cúbico $s(x)$ respecto a dicha partición verifica

$s(x)$ es un polinomio cúbico $s_1(x)$ en el intervalo $[t_1, t_2]$

$s(x)$ es un polinomio cúbico $s_2(x)$ en el intervalo $[t_2, t_3]$

....

$s(x)$ es un polinomio cúbico $s_{n-1}(x)$ en el intervalo $[t_{n-1}, t_n]$

con las siguientes condiciones de empalme en t_2

- $s_1(t_2) = s_2(t_2)$ el mismo valor en el punto t_2.
- $s_1'(t_2) = s_2'(t_2)$ la misma derivada primera en t_2.
- $s_1''(t_2) = s_2''(t_2)$ misma derivada segunda en t_2.

Se demuestra en teoría que con los datos:

- **Valores del spline en los nodos**

$$f(a) = y_1,\ f(t_2) = y_2, \ldots, f(t_{n-1}) = y_{n-1}, f(b) = y_n,$$

- **Valores de las derivadas en los extremos**
$$f'(a) = y'_1,\ f'(b) = y'_n,$$

existe un único **spline cúbico de interpolación** $s(x)$ de $f(x)$ en la partición anterior, dado por

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= \alpha_1 + \beta_1(x-t_1) + \gamma_1(x-t_1)^2 + \delta_1(x-t_1)^3 \\
s_2(x) &= \alpha_2 + \beta_2(x-t_2) + \gamma_2(x-t_1)^2 + \delta_2(x-t_2)^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_{n-1}(x) &= \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}(x-t_{n-1}) + \gamma_{n-1}(x-t_{n-1})^2 + \delta_{n-1}(x-t_{n-1})^3
\end{aligned}$$

Para calcular los coeficientes que aparecen en los polinomios anteriores a partir de los datos de interpolación podemos proceder de la siguiente forma:

- **Paso 1.** Sean
$$h_1 = t_2 - t_1, \ldots, h_{n-1} = t_n - t_{n-1}$$
las longitudes de cada uno de los $(n-1)$ subintervalos de la partición y sean d_j las $(n-1)$ diferencias divididas de primer orden en el intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ dadas por
$$d_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{t_{j+1} - t_j} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}, \quad (j = 1, \ldots, n-1)$$

- **Paso 2.** Calculamos unas cantidades intermedias llamadas**momentos** y que denotaremos por $m_1, \ldots, m_n$ (estas representan las derivadas segundas del spline en los nodos $m_j = s''(t_j)$ y por tanto hay una para cada nodo), como solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
(2h_1)\ m_1 + (h_1)\ m_2 &= 6\ (d_1 - y'_1) \\
h_{j-1}\ m_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)\ m_j + h_j\ m_{j+1} &= 6\ (d_j - d_{j-1}) \\
&\ (j = 2, \ldots, n-1) \\
h_{n-1}\ m_{n-1} + (2h_{n-1})\ m_n &= 6\ (y'_n - d_{n-1})
\end{aligned}$$

- **Paso 3.** Entonces los coeficientes de los polinomios cúbicos que definen el spline $s_j(x) = \alpha_j + \beta_j(x-t_j) + \gamma_j(x-t_j)^2 + \delta_j(x-t_j)^3$ en cada subintervalo $[t_j, t_{j+1}], (j = 1, \ldots, n-1)$ son

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= y_j \quad (j = 1, \ldots, n-1) \\
\beta_j &= d_j - (h_j/6)(2m_j + m_{j+1}) \quad (j = 1, \ldots, n-1) \\
\gamma_j &= m_j/2 \quad (j = 1, \ldots, n-1) \\
\delta_j &= (m_{j+1} - m_j)/(6h_j) \quad (j = 1, \ldots, n-1)
\end{aligned}$$

Ejemplo.

Calcula el spline cúbico que interpola la función $f(x) = 1/(1+20x^2)$ en el intervalo $[0,1]$ tomando los nodos $t_1 = 0, t_2 = 1/4, t_3 = 1/3, t_4 = 1/2, t_5 = 2/3, t_6 = 3/4, t_7 = 1$.

Introducimos los nodos de interpolación en una lista

t = { 0 , 1/4. , 2/4. , 3/4. , 1 }

y los valores de la función en los nodos en otra lista

f[x_] = 1/(1 + 20. x^2); y = Table [**f** [**t** [[**j**]]], **{ j , 1 , 5 }**]

también los valores de la derivada en los extremos del intervalo

y1p = D [**f** [**x**], **x**] **/. x − > 0 ; y5p = D** [**f**[**x**] , **x**] **/. x − > 1**

Aquí todos los subintervalos tienen la misma longitud $h = 0.25$ y las diferencias divididas de primer orden d_1, d_2, d_3, d_4 las colocamos en la lista

h = 0.25 ; d = Table [**(y** [[**j**]] **- y** [[**j - 1**]] **) / h , { j , 2 , 5 }**]

(observa que $d_2 =$ **d** [[**1**]] etc).

Ahora pasamos al sistema lineal de los momentos. La matriz es (5×5) y si la llamamos **maM** será

maM = {{ 2 h , h , 0 , 0 , 0 }, { h , 4 h , h , 0 , 0 },
{ 0 , h , 4 h , h , 0 }, { 0 , 0 , h , 4 h , h }, { 0 , 0 , 0 , h , 2 h } }

El vector columna de los segundos miembros lo llamamos p.e. **seg** y será

seg = Transpose [**{ 6 (d**[[**1**]] **- y1p), 6 (d** [[**2**]] **- d** [[**1**]] **) , 6 (d** [[**3**]] **- d** [[**2**]] **) , 6 (d** [[**4**]] **- d** [[**3**]] **) , 6 (y5p - d** [[**4**]] **) }**]

Entonces los momentos **m** salen al resolver el sistema lineal

m = LinearSolve [**maM , seg**]

y los coeficientes

al = Flatten [Table [y [[j]] , { j , 1 , 4 }]]

be = Flatten [Table [d[[j]] - (h / 6) (2 m [[j]] + m [[j+1]]) , { j , 1 , 4 }]]

ga = Flatten [(0.5) * Table [m [[j]] , { j , 1 , 4 }]]

de = Flatten [Table [(m [[j + 1]] - m [[j]]) / (6 h) , { j , 1 , 4 }]]

Aquí el comando **Flatten** se ha introducido para que **al, be , ga , de** resulten listas normales (de primer nivel), su efecto es que reduce un nivel en las listas.

Seguidamente se definen los polinomios **s1 , s2, s3 , s4** . Por ejemplo para el **s1** tendremos

s1 [x _] = al [[1]] + be [[1]] (x - t [[1]])+
ga [[1]] (x - t [[1]])^2 **+ de [[1]] (x - t [[1]])** ^{3}

El spline global lo podemos formular con la orden **Which** que tiene la estructura

s1 [x _] = Which [
t [[1]] < = x <= t [[2]], s1 [x], t[[2]] < x <= t [[3]] , s2 [x] ,
t [[3]] < x <= t [[4]] , s3 [x], t [[4]] < x <= t [[5]] , s4 [x]]

Finalmente si dibujamos conjuntamente la función $f(x)$ con el spline interpolador tenemos el gráfico siguiente:

Ejercicio. Calcula el spline interpolador de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in [0,1] \\ 4 - 7x + 7x^2 - 4x^3 + x^4, & x \in [1,2] \end{cases}$$

Representa gráficamente la función $f(x)$ junto a su spline aproximador.

1.9. Práctica 9: Funciones reales. Gráficas.

Para la representación de funciones de una variable $y = f(x)$, el comando básico es "*Plot*" que tiene la siguiente sintaxis:

$$Plot[\ f[x],\ \{x, a, b\},\ Opciones]$$

Este comando dibuja la función de una variable $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ con las opciones que se le indiquen. Notar que para realizar la gráfica, Mathematica calcula el valor de la función en un conjunto discreto de puntos del intervalo $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ (salvo indicación en contra toma 25 puntos) y luego forma la poligonal que une los puntos $(x_i, f(x_i))$, por tanto si la función tiene discontinuidades de tipo salto en la gráfica de la pantalla no aparecen como tales.

Si queremos dibujar simultáneamente varias funciones $y = f_1(x), y = f_2(x), \ldots$ entonces escribiremos las funciones entre llaves en la forma

$$Plot[\ \{f_1[x], f_2[x], \ldots\},\ \{x, a, b\},\ Opciones]$$

La orden *Plot* representa la función a pesar de que haya una discontinuidad evitable, de salto finito o infinito, o esencial.

Ejercicio 1) Dibuja la función *parte entera de* x cuya sintaxis es $Floor[x]$ en el intervalo $[-2, 5]$. Observa que el comando *Plot* no muestra explícitamente los puntos de discontinuidad (de tipo salto) pero de todas formas se pueden intuir desde la figura. ¿ en qué valores de x es discontinua esta función?

Ejercicio 2) Dibuja la función $Ceiling[x]$ que aproxima x por exceso en el mismo intervalo del caso anterior. Observa la relación con $Floor[x]$.

Ejercicio 3) Dibuja la función *Round*$[x]$ en $[-2, 5]$.¿ Qué hace esta función para cada x?

Ejercicio 4) Dibuja la función trigonométrica: $\operatorname{sen}(x)$ en un periodo, (en $Mathematica$ es Sin[x]) . Dibuja esta función en el intervalo $[0, 20\pi]$. Dibuja también en $[0, 2\pi]$ las funciones $\operatorname{sen}(10x)$ y $\cos(60x)$; presta atención a la diferencia de sintáxix entre cómo se escribe en Matemáticas y cómo hay que escribir el *Input* para el manipulador $Mathematica$, utiliza el *Help* si lo necesitas.

Ejercicio 5) Dibuja conjuntamente las funciones trigonométricas seno y coseno en un periodo.

Ejercicio 6) Dibuja las funciones exponencial y logarítmica en diversos intervalos. Calcula las asíntotas verticales y horizontales de estas funciones. Dibuja conjuntamente las dos funciones anteriores junto con $y = x$ y observa la simetría.

Ejercicio 7) Dibuja la función trigonométrica de la tangente en el intervalo $[0, 2\pi]$. ¿Dónde están las asíntotas?

La orden *Plot* de Mathematica para dibujar funciones tiene diferentes opciones. Si no decimos nada se seleccionan automáticamente pero a veces interesa seleccionar algunas de estas opciones y poder cambiarlas según nuestras necesidades. Para una lista detallada se puede consultar el "Help". No obstante comentaremos algunas de ellas:

$PlotRange- > \{c, d\}$ hace que en la gráfica solo aparecen valores de la variable y en el intervalo $[c, d]$. Esta orden es muy conveniente cuando el rango de valores de la función es muy amplio, por ejemplo porque la función tenga alguna asíntota vertical.

$PlotLabel- > "bonito\ grafo"$ coloca una etiqueta en el dibujo con lo que hayamos escrito entre las comillas (en este caso *bonito grafo*).

Eligiendo convenientemente el intervalo $[a, b]$ en el que se representa la función y construyendo una sucesión de intervalos encajados se pueden localizar algunos puntos de interés como el máximo o mínimo de una función, la intersección de dos curvas,etc. Se van realizando sucesivas ampliaciones de la zona de estudio, consiguiendo un efecto de lupa para determinar con bastante exactitud el punto que interesa.

Ejercicio 8) Dibuja la función $y = tan(x)$, en el intervalo $[0, 2\pi]$. Repite la gráfica usando la opción

$PlotRange \to \{-10, 10\}$.

Ejercicio 9) Dibuja la función $y = \operatorname{sen}(e^x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Observa en el gráfico que esta función tiene un máximo entre 0 y 1. Utiliza intervalos encajados para ir determinando el punto de máximo con tres decimales correctos. Utiliza la orden $Solve[Exp[x] == Pi/2, x]$, para calcular de otro modo el máximo con seis decimales.

En el ejercicio 9, la segunda alternativa a veces no es posible porque la orden $Solve$ no puede resolver la ecuación. Esa última ecuación aparece al anular la derivada primera de la función; por lo tanto, tampoco la segunda opción es posible cuando la función no sea derivable, haciéndose necesario usar el método de intervalos encajados.

Otra opción de la orden *Plot* es

$$PlotStyle \to \{RGBColor[r1, g1, b1], RGBColor[r2, g2, b2]\}.$$

Esta opción es útil cuando se representan dos o más curvas y se quieren distinguir dándoles diferente color. La expresión anterior es válida para dos curvas, a la primera se le dan los valores $r1, g1, b1$ de rojo (red, R), verde (green, G), y azul (blue,B); tres colores primarios. Para la segunda gráfica los parámetros son $r1, g1, b1$. Si se quieren representar más funciones basta añadir más opciones $RGBColor[rj, gj, bj]$.

Con esta opción $RGBColor[a, b, c]$ y representando rectángulos para diferentes valores de los parámetros a, b, c podemos construir nuestra particular paleta de colores.

Ejercicio 10) Dibuja las funciones $y = \text{sen}(x)$ e $y = e^x$, la primera en verde y la segunda en rojo en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Observa que se cortan entre -4 y -2; también hay otros (infinitos) puntos de corte más. Utiliza intervalos encajados para determinar la abcisa y la ordenada del punto de corte con cuatro decimales correctos.

La opción $PlotPoints \to np$, realiza la gráfica evaluando la función con np puntos. Esta opción tiene su interés en algunos casos en que la gráfica aparece distorsionada. En esos casos conviene aumentar ligeramente el número de puntos.

Ejercicio 11) Representa la gráfica de $y = \cos(2\pi x)$ en el intervalo $[0, 19]$ y con rango de valores en la y en $[0, 1.2]$. ¿Observas alguna zona de la gráfica con alguna distorsión? Realiza el mismo gráfico con la opción del $PlotPoints$ con 40 puntos, y con 100 puntos. Compara los gráficos.

Mathematica dibuja también funciones con discontinuidades esenciales y no da ninguna advertencia de que pueda evaluar la función en algún punto que no sea del dominio o que no existan los límites. Esto ocurre con funciones como $y = \text{sen}(1/x)$, que oscilan indefinidamente conforme nos acercamos hacia 0. El 0 no es del dominio de la función y ésta no tiene límites laterales en 0.

Ejercicio 12) Representa la gráfica de $y = \text{sen}(1/x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y en el intervalo $[-\pi/10, \pi/10]$. Haz lo mismo para la función $y = x\,\text{sen}(1/x)$ en los mismos dos intervalos de antes. Aumenta el intervalo de representación. A la vista de las gráficas, ¿puedes intuir los límites en 0 y en infinito para ambas funciones?

Ejercicio 13) Representa la gráfica de $f(x) = x^2\,\text{sen}(1/x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y en el intervalo $[-\pi/10, \pi/10]$. Representa la función anterior conjuntamente con las parábolas $y = x^2$, $y = -x^2$ en el segundo intervalo. A la vista de las gráficas, ¿puedes intuir los límites en 0 y en infinito para esta función? Tienes la sospecha de que esta función f es continua en 0 si se define $f(0) = 0$? ¿y sería derivable?

Otras opciones de la orden *plot* dan un aspecto más agradable o más adecuado según los casos. Así por ejemplo,

$Frame->True$ crea un marco alrededor de la gráfica.

$AxesLabel->\{"xabcisa", "y = f(x)"\}$ dibuja los ejes escribiendo esas leyendas.

$GridLines->Automatic$ añade un enrejillado de líneas junto con el gráfico.

$AspectRatio->Automatic$ representa la curva con sus verdaderas dimensiones poniendo la misma escala en el eje x y en el y.

Ejercicio 14) Dibuja la gráfica de la función $y = \text{sen}(x^2) + x\cos(x)$ en el intervalo $[-1, 6]$ y utiliza las opciones anteriores de $Frame$, $AxesLabel$, $GridLines$ y $AspectRatio$. Evalúa la función en $x = 1.1$.

Sin embargo, cuando se pide la representación de una curva fuera de su dominio, como no puede evaluar la función, Mathematica da un aviso de error. A pesar de ello representa la función en los puntos del dominio.

Ejercicio 15) Utilizando la orden *Plot* y por medio de intervalos encajados calcula las intersecciones de la curva $y = \text{sen}(x^2)+x\cos(x)$ con la circunferencia unidad con tres decimales correctos. Empieza representando las funciones en el intervalo $[-2, 2]$.

Para representar dos o más funciones y poder distinguirlas pueden usarse colores como anteriormente o puede utilizarse otras opciones con la orden $PlotStyle$. Entre los más destacados están:

$Thickness[t]$ dibuja la gráfica con un grosor t.

$GrayLevel[g]$ da una tonalidad de gris entre $g = 0$ (negro) y $g = 1$ (blanco).

$Dashing[\{a, b, c, ...\}]$ dibuja una curva como una secuencia de segmentos de longitud $a, b, c, ...$

Así con la opción

$$PlotStyle \to \{\{Thickness[t1], GrayLevel[g1], Dashing[\{a1, b1\}]\},$$

$$\{Thickness[t2], GrayLevel[g2], Dashing[\{a2, b2\}]\}\},$$

se dibujan dos gráficas con grosor, nivel de grises y línea discontinua según se especifica. Análogamente se haría para distinguir el grafo de tres o más funciones.

Ejercicio 16) Dibuja un periodos de las funciones seno y coseno. El seno con grosor =0.01, nivel de gris =0.8, y segmentos de longitud 0.06,0.06, y el coseno con grosor =0.02, nivel de gris=0.2 y segmentos de longitud 0.06,0.03.

Ejercicio 17) Dibuja en el intervalo $[0, 2]$ tres rectas: la bisectriz del primer cuadrante y dos paralelas a ésta con ordenadas en el origen -0.4 y -0.8. Utiliza la opción *Dashing* con valores: 0.01,0.03,0.06,0.03 para la bisectriz; 0.01, 0.01 para la paralela más cercana y 0.04,0.02 para la más lejana. Cambia los valores de *Dashing* para observar el efecto que se produce.

Ejercicio 18) Dibuja conjuntamente las funciones $y = \tan(x^2)$ e $y = \operatorname{sen}(x^2)$ con diferentes colores en el intervalo $[0, \pi]$. Utiliza la opción *PlotRange* para mejorar el dibujo.

1.10. Práctica 10: Estudio analítico de funciones reales.

Estudio de funciones con Mathematica

En el estudio de las funciones de una variable $y = f(x)$ son importantes, entre otros, los siguientes elementos relacionados con el estudio de una función:

- Dominio y Rango.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.
- Concavidad hacia las $y > 0$ y hacia las $y < 0$. Puntos de inflexión.
- Asíntotas: Verticales, horizontales y oblicuas.
- Representación gráfica de la función.

Veremos seguidamente como se pueden usar las herramientas disponibles en *Mathematica* para la determinación de estos elementos. Para ello tomemos un ejemplo y hagamos el estudio completo indicando en cada paso las órdenes de *Mathematica* que pueden usarse.

Ejemplo: Dada la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^3 - 3x^2}{x^4 + 5}}$$

i) Calcula su dominio y rango.

ii) Máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.

iii) Asíntotas indicando la posición de la curva respecto a la asíntota.

iv) Calcula el punto (o puntos) de la curva cuya tangente sea paralela a la recta $y = x$.

v) Representa conjuntamente la función $y = f(x)$ y la tangente de iv)

i) Para el dominio hace falta que el numerador del radicando $2x^3 - 3x^2$ sea positivo, ya que el denominador $x^4 + 5$ lo es siempre. Se usa la orden $Solve[2x^3 - 3x^2 == 0, x]$ que nos da las raíces de la ecuación. Usamos $Plot[2x^3 - 3x^2, \{x, a, b\}]$ para dibujar en un intervalo $[a, b]$ que contenga a las raíces obtenidas y decidir dónde es positivo el radicando, y por tanto obtener el dominio de f. Resulta $\mathrm{Dom}(f(x)) = \{0\} \cup [1.5, +\infty)$

A la vista del gráfico también es inmediato el *rango* de f o *recorrido* de f, que es $\mathrm{Rang}(f(x)) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

ii) Para los máximos y mínimos se puede hacer una exploración preliminar con la gráfica. Hacemos un $Plot[f[x], \{x, 1.5, 5\}]$ de la función para aproximar el valor del máximo. Luego, por la técnica de intervalos encajados va delimitándose el máximo que resulta $x_{max} \simeq 3.29259$ y su ordenada $f[3.29259]$. No hay más extremos.

En los casos, como éste, en que f sea derivable, puede calcularse la función derivada fp, simplificando el resultado y los ceros de fp son posibles extremos. Basta evaluar la función en esos puntos y representarla en un entorno para decidir si es extremo o no y calcular su cota. Así pondremos

$$fp[x\_] = Simplify[D[f[x], x]], \quad y \quad NSolve[fp[x] == 0, x]$$

para localizar los valores x^* que anulan la derivada. Y $Plot[f[x], \{x^*, a, b\}]$ con a y b tales que el intervalo $[a, b]$ sea pequeño y contenga a x^*.

Hay que observar que $NSolve$ resuelve la ecuación $fp[x] == 0$ numéricamente y da resultados con decimales. Si se pone en su lugar $Solve[fp[x] == 0, x]$ intenta dar las soluciones en forma cerrada, las raíces de un polinomio de grado 5 como expresión de radicales que muchas veces, como en este caso, no es posible.

También puede usarse la orden $FindRoot$ para localizar raíces de funciones y en este caso valores extremos. La instrucción $FindRoot$ utiliza un proceso iterativo que a partir de un valor inicial x_0 intenta hallar una raíz de $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$. Es muy importante elegir bien el valor de x_0, pues sino el proceso puede no converger a pesar de haber una raíz. También conviene que el intervalo $[a, b]$ no sea muy grande. Si hay más de una raíz de f en dicho intervalo el procedimiento converge a una de ellas; para localizar las demás hay que subdividir el intervalo y cambiar el valor inicial x_0. La instrucción en $Mathematica$ tiene la siguiente sintaxis:

$$FindRoot[\ fp[x] == 0\ ,\ \{x,\ x_0,\ a,\ b\ \}\ ]$$

En nuestro ejemplo probamos con

$$x0 = 3.5;\ FindRoot[\ fp[x] == 0\ ,\ \{x,\ x_0,\ 3,\ 4\ \}\ ]$$

ya que en la gráfica observamos que el máximo anda entre 3 y 4, y hemos tomado como x_0 el punto medio del intervalo. Si se quiere mayor precisión recordemos que podemos usar el comando

$$N[\ FindRoot[\ fp[x] == 0\ ,\ \{x,\ 3.5,\ 3,\ 4\ \}\ ], 20]$$

nos daría la aproximación a la solución con veinte decimales; solución que naturalmente es la misma que la obtenida anteriormente con intervalos encajados o con $NSolve$.

Para la determinación de las inflexiones, el estudio es paralelo al anterior con la anulación y estudio del signo de la derivada segunda en lugar de la derivada primera. Por la gráfica suele ser muy difícil determinar las inflexiones haciendo intervalos encajados. Es más recomendable hallar la expresión de la derivada segunda como

$$fpp[\ x_-\ ] = Simplify[\ D[\ fp[\ x\ ]\ ,\ x]\ ]$$

y de momento hacemos un *Plot* para ver si es positiva o negativa. Recordar que si $f''(x) < 0$ vuelve la concavidad hacia las $y < 0$ y si $f''(x) > 0$ vuelve la concavidad hacia las $y > 0$. Los puntos de inflexión son aquellos en los que hay un cambio de concavidad.

Si hacemos un *Plot* se aprecia que hasta aproximadamente $x = 5$, $f''(x)$ es negativa y luego se hace positiva. Para localizar el punto de inflexión podemos proceder gráficamente por intervalos encajados o bien usar $NSolve$ en la forma

$$NSolve[fpp[x_-] == 0, x]\ ]$$

O alternativamente, como la inflexión parece estar entre 5 y 5.5, usamos $FindRoot$,

$$x_0 = 5.2;\ FindRoot[\ fpp[\ x\ ] == 0,\ \{\ x,\ x_0,\ 5, 5.5\ \}\ ]$$

y nos da $x \to 5.09873$. Por tanto

- Concavidad hacia $y < 0$ para $x \in [1.5, 5.09873)$
- Punto de inflexión en $x = 5.09873$.
- Concavidad hacia $y > 0$ en $(5.09873, +\infty)$.

iii) En el cálculo de las asíntotas, si queremos ver como se comporta la función para x muy grande hacemos el límite para $x \to +\infty$ con el comando

$$Limit[f[x], x \to Infinity]$$

si da un valor concreto p, se tendrá una *asíntota horizontal* $y = p$, que se puede representar conjuntamente con la función

$$Plot[\{f[x], p\}, \{x, a, b\}]$$

En nuestro ejemplo sale el límite anterior 0, luego $y = 0$ es la asíntota horizontal. Es conveniente hacer también

$$Limit[f[x], x \to -Infinity]$$

pues podría salir diferente y en ese caso habría dos asíntotas horizontales.

Para las *asíntotas oblicuas*, que en este caso no hay, deben hacerse los siguientes límites en +infinito y -infinito, para calcular la pendiente m y la ordenada en el origen de la asíntota,

$$m = Limit[f[x]/x, x \to -Infinity],$$

$$b = Limit[f[x] - m * x, x \to -Infinity],$$

y la asíntota será $y = mx + b$. Es claro que si hay asíntota horizontal no puede haber asíntota vertical y viceversa.

La localización de las *asíntotas verticales*, que en este ejemplo tampoco hay, suele hacerse observando las abcisas para las cuales la función toma valores arbitrariamente grandes, como por ejemplo, valores que anulan un denominador. Se emplean entonces los límites laterales. Consultar el *help* de *Mathematica* con la entrada *limit*. Tienen la sintaxis

$$Limit[f[x], x \to a, Direction \to 1],$$

$$Limit[f[x], x \to a, Direction \to -1]$$

para el límite lateral derecho e izquierdo respectivamente. En este caso $x = a$ es la asíntota vertical. A veces estos límites laterales no son bien calculados por *Mathematica* como se verá más adelante, por lo que se recomienda evaluar la función cerca del punto para asegurarse de los resultados.

En los casos en que hay asíntotas verticales se hace especialmente recomendable usar la opción *PlotRange* de la orden *Plot*.

iv) Cálculo de puntos de la curva cuya tangente tenga una pendiente determinada, y su representación.

Para calcular los puntos en los que la recta tangente es paralela a otra recta, o tiene una pendiente determinada m basta aplicar *NSolve* o *FindRoot* a la ecuación $fp[x] = m$, en que la función derivada toma el valor M. Es decir,

$$NSolve[fp[x] == m, x].$$

Y para cada una de las soluciones x_i, se determina la recta tangente que tendrá por ecuación

$$t[x\_] = f[x_i] + fp[x_i] * (x - x_i).$$

A continuación se puede representar conjuntamente

$$Plot[\{f[x], t[x]\}, \{x, a, b\}]$$

En este ejemplo se piden los puntos de la curva en que la tangente es paralela a $y = x$, o lo que es lo mismo, los puntos en los que la derivada es 1. En la gráfica de f se observa que es un punto que está entre 1.5 y 3. Representamos la función derivada menos 1, $fp(x) - 1$ y observamos que se anula cerca de 1.6. Podemos usar la instrucción $FindRoot$ como $x0 = 1.6$; $FindRoot[fp[x] == 1, \{x, x0, 1.5, 3\}]$ y se obtiene el valor $x = 1.6065$. La recta tangente es $t[x\_] = f[1.6065] + fp[1.6065) * (x - 1.6065)$. Y representamos conjuntamente $f(x)$ y $t(x)$ con $Plot[\{f[x], t[x]\}, \{x, 1.5, 2.5\}]$.

Cálculo de la función recíproca y su representación.

Podemos usar *Mathematica* para calcular una función inversa o recíproca de otra dada. Tomemos un

Ejemplo. Consideremos la función

$$g(x) = \frac{x - 1}{5 + 2x}.$$

La representamos en un intervalo suficientemente amplio, por ejemplo $[-10, 10]$ y observamos que tiene una asíntota vertical en $x = -2.5$, valor que anula al denominador. Por tener asíntota vertical se aconseja usar convenientemente la opción $PlotRange$. Calculando el límite de $g(x)$ en más infinito y menos infinito, se concluye que la recta $y = 0.5$ es una asíntota horizontal. Y se deduce el dominio y rango de g, resultando $dom(g) = (-\infty, -2.5) \cup (-2.5, \infty)$, y $ran(g) = (-\infty, 0.5) \cup (0.5, \infty)$.

Pueden calcularse los límites laterales de g en $x = -2.5$.

La función es inyectiva pues considerando un haz de rectas horizontales, cada recta del haz corta a la curva en a lo sumo un punto. Por lo tanto hay función inversa, que denotamos por *ginv*. Para obtener *ginv* basta despejar x en la ecuación $y = g(x)$, es decir, usamos

$$Solve[y == g[x], x]$$

y definimos $ginv[y\_] = (-1 - 5 * y)/(-1 + 2 * y)$.

Representamos con *Plot* la inversa *ginv* en el intervalo $[-7, 7]$.

Observamos que el dominio de *ginv* coincide con el rango de g, y el rango de *ginv* es el mismo que el dominio de g. $dom(ginv) = (-\infty, 0.5) \cup (0.5, \infty)$, y $ran(ginv) = (-\infty, -2.5) \cup (-2.5, \infty)$.

Representamos conjuntamente las funciones $ginv(y)$, $g(y)$ y la bisectriz y del primer cuadrante, con distintos colores, usando *PlotRange*, y observamos la simetría de *ginv* y g respecto a la bisectriz.

También si hacemos la composición de una función con su inversa comprobamos que sale la identidad. Probar a poner $ginv[g[x]]$ o mejor

$$Simplify[ginv[g[x]]], \quad Simplify[g[ginv[y]]],$$

y observar los resultados.

Ejercicios.

1) Dada la función $f(x) = (x+1)^2$, represéntala; observa que no es inyectiva. Despeja x de la ecuación $y = f(x)$. Observa que hay dos determinaciones de x, y define dos funciones $fi1$ y $fi2$ para cada una de estas determinaciones. Representa conjuntamente $fi1$ y $fi2$. Calcula la composición simplificada de $fi1 \circ f$, $fi2 \circ f$ y $f \circ fi1$. Comenta los resultados obtenidos.

2) Se considera la función $fr(x) = \sqrt{(x-1)/(x+1)}$, represéntala. Representa la función del radicando y estudiando su signo, decide cuál es el dominio de fr. Calcula los límites laterales en los puntos frontera del dominio; evalúa fr cerca de esos puntos y contrasta los resultados de los límites. Calcula el límite en el infinito y halla el recorrido y las asíntotas horizontales y verticales. Observa que la función es inyectiva. Despeja x de la función $y = fr(x)$. Representa la función inversa fri. Observa que no valen todos los arcos obtenidos porque se han introducido soluciones extrañas. ¿Qué arcos forman parte de la inversa fri de fr? ¿Cuáles no forman parte?

3) Dada la función

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}(x^2 - 7x + 10)^2}{x^4 + 1}$$

Calcula: **i)** El dominio y el rango. **ii)** Los máximos, mínimos relativos (se recomienda usar la opción *PlotRange* con distintos valores). Se pueden usar intervalos encajados o anular la derivada *gp*. **iii)** Halla la expresión simplificada de la derivada segunda *gpp* y sus raíces. Determina las inflexiones y los intervalos de concavidad-convexidad según el signo de *gpp*. **iv)** Calcula el límite de la función en el infinito y el concluye que no hay asíntota horizontal. Prueba que tampoco hay asíntotas oblicuas. Calcula el límite de $g(x)/\sqrt{x}$.

A la vista del resultado la función g tiene una rama asintótica parabólica. Dibuja conjuntamente g y $\sqrt{x}$ en un intervalo de valores grandes e indica la posición relativa de la curva respecto a la curva asintótica.

4) Dada la función

$$h(x) = \frac{x^3}{|x^2 - 6x - 10|}$$

Se pide: **i)** Represéntala en un intervalo amplio. Halla las raíces del denominador, las asíntotas verticales y deduce el dominio y el rango de h. **ii)** Observa que la función no es derivable pero que por intervalos puede expresarse como la unión de dos funciones $h1$ y $h2$ que son derivables. Localiza un máximo relativo con tres cifras decimales correctas por intervalos encajados. Halla los extremos (abcisa y ordenada) de h calculando los ceros de las derivadas de $h1$ y $h2$. Comprueba que coincide con el valor obtenido con intervalos encajados. **iii)** Calcula las derivadas segundas $h1pp$ y $h2pp$ de $h1$ y $h2$ para determinar las dos coordenadas de las inflexiones. **iv)** Calcula las asíntotas horizontales y las oblicuas; halla los puntos de corte de las asíntotas con la curva h y la posición relativa de h respecto a las asíntotas para valores muy positivos y muy negativos de x.

5) Considera la función

$$k(x) = \frac{10584 - 4788x + 426x^2 + 97x^3 - 20x^4 + x^5}{25 - 26x^2 + x^4}$$

i) Represéntala en un intervalo. Halla el dominio y el rango de k. **ii)** Calcula las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. Halla la posición relativa de la curva respecto a las asíntotas. **iii)** Calcula la derivada primera kp simplificando el resultado. Determina los extremos de la función y representa un detalle de la gráfica en un entorno de cada extremo. **iv)** Calcula el punto de la curva $y = k(x)$ en que la recta tangente forma un ángulo de 60 grados con la horizontal. (Ayuda: Resuelve la ecuación $kp(x) = tan(\pi/3)$.

1.11. Práctica 11: Curvas en forma implícita.

Normalmente una función de dos variables se da en forma explícita, $y = f(x)$, con la variable y despejada. Sin embargo, en algunos casos podemos tener las variables x e y mezcladas, verificando una determinada relación funcional $F(x, y) = 0$, en la cual no es fácil, y a veces es imposible, despejar alguna de las variables x o y. Hay que hacer notar que F depende de dos variables, es una función de dos variables.

En Mathematica podemos empezar por definir la función implícita (usamos mejor letra inicial minúscula), $f[x_-, y_-]$. En el caso de poder despejar alguna variable, es posible dibujar la curva. En efecto, intentamos

$$Solve[f[x, y] == 0, x] \quad \text{o} \quad Solve[f[x, y] == 0, y].$$

El *output* de $Mathematica$ en general suelen ser expresiones muy complejas, indicando que se necesitan ciertas funciones inversas; pero si en alguna de las dos opciones se puede despejar la variable, podemos definir un conjunto de funciones explícitas que equivalen a la función implícita del enunciado. Por ejemplo, supongamos que se puede despejar la y del segundo $Solve$ de arriba, si se pudiera despejar x del $Solve[f[x, y] == 0, x]$, las instrucciones que habría que poner serían análogas a las que siguen a continuación cambiando x por y y viceversa. De la orden $Solve[f[x, y] == 0, y]$, $Mathematica$ ha contestado algo como

$$y- > f1(x); \quad y- > f2(x); \ \ldots$$

A continuación definimos las funciones

$$f1[x_-] = f1(x); \quad f2[x_-] = f2(x); \ldots,$$

tantas funciones como determinaciones nos haya dado $Mathematica$.

Estas funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots$ se pueden representar, derivar respecto a x, y hacer en general cualquier manipulación válida con funciones de una variable.

Cuando la curva está dada en forma implícita, para calcular la derivada recordemos si se toma x como variable independiente de modo que $y = y(x)$ satisface $f(x, y(x)) = 0$ y se deriva por la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, y' = 0,$$

de donde (usando la forma abreviada de las derivadas parciales)

$$y' = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

Se recuerda que las derivadas parciales de una función de varias variables se obtienen derivando solamente respecto a la variable que se considera y manteniendo las demás variables como parámetros constantes. En *Mathematica* para obtener las parciales de una función f de dos variables, respecto de x e y, se emplean las instrucciones $D[f[x,y],x]$ y $D[f[x,y],y]$ respectivamente.

Hay que observar que para calcular la derivada y' en un punto (x_0, y_0) es necesario conocer la abcisa x_0 y la ordenada y_0. Si sólo se conoce la abcisa es necesario saber en qué determinación de la curva estamos y para ello se resuelve con el comando $Solve[f[x_0, y] == 0, y]$ y decidir de las soluciones dadas la que corresponde.

Hay que observar que para calcular la derivada y' no es necesario calcular las funciones explícitas $f_1, f_2, \ldots$. Sin embargo en el que caso de que estas funciones existan los valores de las derivadas por ambas expresiones deben coincidir. Es decir, supongamos que se quiere calcular la derivada $y'(x_0)$ en el punto (x_0, y_2) siendo y_2 una determinación de $Solve[f[x_0, y] == 0, y]$, entonces $y'(x_0) = -f_x(x_0, y_2)/f_y(x_0, y_2)$, y la derivada está calculada. Si podemos obtener las funciones explícitas desde $Solve[f[x,y] == 0, y]$ una de las determinaciones, llamémosla f_2, será tal que $f_2(x_0) = y_2$, con lo cual también la derivada puede obtenerse de $y'(x_0) = f_2'(x_0)$. Más adelante se comprueba con un ejemplo.

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P_0(x_0, y_0)$ será

$$y - y_0 = y'(x_0, y_0)\ (x - x_0).$$

Ilustremos todo esto con un ejemplo sencillo.

Ejemplo: Dada la curva definida de forma implícita por la ecuación $F(x,y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 - 4 = 0$, halla su representación gráfica. Obtén las rectas tangentes en los puntos de abcisa $x = 2.5$. Haz la representación conjunta de la curva y las rectas tangentes.
Solución: En primer lugar, se define la función $f(x,y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 - 4$. La expresión $f = 0$, representa una circunferencia de centro $(1, -3)$ y radio 2. Mediante la orden $Solve[f[x,y] == 0, y]$ obtenemos dos determinaciones con radicales y definimos sendas funciones explícitas

$$f_1[x\_] = -3 - \sqrt{3 + 2x - x^2}, \quad f_2[x\_] = -3 + \sqrt{3 + 2x - x^2},$$

que corresponden a la semicircunferencia superior y a la inferior respectivamente. Después de dibujar la función radicando, se determina el dominio de f_1 y f_2 que es $[-1, 3]$. Si hacemos un

$$Plot[\{f_1[x], f_2[x]\}, \{x, -1, 3\}, AspectRatio- > Automatic]$$

se tiene la gráfica de la circunferencia que equivale a la ecuación $f[x, y] == 0$.

Vamos a calcular las derivadas y las rectas tangentes en un punto.

Hallamos las derivadas parciales $D[f[x, y], x]$ y $D[f[x, y], y]$ y la derivada de f, poniendo $fp[x\_, y\_] = -D[f[x, y], x]/D[f[x, y], y]$. Se obtiene $fp(x, y) = -(-1 + x)/(3 + y)$.

Para obtener las ordenadas de los puntos con abcisa $x = 2.5$, resolvemos $Solve[f[2.5, y] == 0, y]$ y obtenemos los valores $y = -1.677$ y $y = -4.322$. Observamos que estos valores también pueden obtenerse evaluando $f1[2.5]$ y $f2[2.5]$. Por tanto las rectas tangentes son

$$t1[x\_] = -1.677 + fp[2.5, -1.677] * (x - 2.5),$$

$$t2[x\_] = -4.322 + fp[2.5, -4.322] * (x - 2.5)$$

El punto de intersección de las dos tangentes se puede obtener por medio de $Solve[t1[x] == t2[x], x]$ y se obtiene el valor $x = 3.666$.

Hay que observar que si derivamos $f1$ por medio de $f1p[x\_] = D[f1[x], x]$ y evaluamos la derivada $f1p[2.5]$, (no hace falta la ordenada -1.677), se obtiene el mismo valor de $fp[2.5, -1.677]$.

Para dibujar la circunferencia y las rectas tangentes se usa

$$Plot[\{f1[x], f2[x], t1[x], t2[x]\}, \{x, -1, 4\}, AspcetRatio \to Automatic]$$

o mejor, haciendo por separado

$$graf1 = Plot[\{f1[x], f2[x]\}, \{x, -1, 3\}, AspectRatio \to Automatic]$$

$$graf2 = Plot[\{t1[x], t2[x]\}, \{x, -1, 4\}, AspectRatio \to Automatic]$$

$$Show[graf1, graf2]$$

Ejercicio 1: Sea la función definida implícitamente por $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - 4x^3 = 0$. Usa la orden *Solve* para intentar despejar la variable x y la y. Define dos funciones explícitas $y = f1(x)$, $y = f2(x)$ que sean equivalentes a $f = 0$. Halla el dominio de estas funciones y represéntalas conjuntamente en el intervalo $[-5/16, 10]$. Utiliza convenientemente la opción *PlotRange* y un intervalo de x de menor longitud para obtener un detalle del origen. Halla los puntos que tienen abcisa $x = 0.8$. Calcula las rectas tangentes a $f = 0$ en esos puntos. Representa conjuntamente $f1$, $f2$ y las dos rectas tangentes.

Recordamos la expresión del ángulo de dos rectas. Si las rectas tienen pendientes m_1 y m_2 definidas por

$$m1 = \ fp\ [\ x0, y0\ ], \qquad m2 = fp\ [\ x1, y1\ ]$$

el ángulo que forman las dos rectas (en radianes) será

$$\alpha = ArcTan[Abs[\ (m1 - m2)/(1 + m1 \cdot m2)\ ]]$$

Si hay que pasar el ángulo a grados basta multiplicar es resultado por $(180/\pi)$.

Ejercicio 2: Halla las rectas tangentes a la curva definida implícitamente por la ecuación $x^4 + 3xy^2 - 25x - 264 = 0$ en los puntos de abcisa $x_0 = 2$. Calcula el punto de intersección de dichas tangentes y el ángulo que forman. Calcula explícitamente las dos ramas que determina la ecuación implícita anterior, busca su dominio de definición y haz su representación gráfica.
Solución al ejercicio 2: Ordenadas de abcisa $x = 2$ son $y = \pm 7.047$. Rectas tangentes $y = -7.047 + 1.844(x - 2)$ y $y = 7.047 - 1.844(x - 2)$. Intersección de las tangentes en $0.465, 5.301)$. Ángulo formado por las tangentes 0.993 radianes. Las dos determinaciones son $y = \pm\sqrt{264 + 25x - x^4}/\sqrt{3x}$.

Ejercicio 3: Calcula los puntos de intersección de las curvas

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0, \qquad x^2 + y^2 - x - y = 0,$$

y el ángulo que forman las tangentes a las dos curvas en dichos puntos.
Solución al ejercicio 3: Puntos de intersección $(0, 0)$ y $(35/29, 15/29)$. El ángulo formado por las tangentes en los dos puntos de intersección es igual en ambos casos y vale 78.69 grados.

Ejercicio 4: Dados tres puntos no alineados $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, recuerda una fórmula sencilla para calcular el área del triángulo P_0, P_1, P_2 (por ejemplo en forma de determinante). Aplica la anterior para calcular el área del triángulo de lados

$$5x - 2y + 4 = 0, \quad 63x - 222y + 99 = 0, \quad 120x - 121y + 122 = 0$$

El área sale un número muy pequeño. Representa las tres rectas anteriores en un mismo gráfico y corrobora que el área es pequeña porque las tres rectas se cortan en tres puntos muy próximos.
Solución al ejercicio 4: Si los puntos son $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ aplicando el producto vectorial de dos vectores (los vectores P_0P_1 y P_0P_2)

el área del triángulo de vértices estos tres puntos está dado por el siguiente determinante

$$A = \frac{1}{2}\left|\mathbf{Det}\begin{pmatrix} x1 - x0 & y1 - y0 \\ x2 - x0 & y2 - y0 \end{pmatrix}\right|$$

Con la orden *Solve* resolvemos el corte de cada dos rectas y así los vértices del triángulo que son $(-115/164, 81/328)$, $(-48/73, 26/73)$ y $(-5035/6339, 466/2113)$. El área vale 0.009 unidades cuadradas. Para dibujar las rectas, despejar y con la orden *Solve* para obtener la función explícita de cada recta. Ampliar el dibujo en la zona de intersección de las rectas.

Ejercicio 5: Calcula la ecuación de las bisectrices de las rectas

$$5x - 2y + 4 = 0, \quad 63x - 222y + 99 = 0,$$

Dibuja conjuntamente las dos rectas y las dos bisectrices con distintos colores.
Solución al ejercicio 5: Las dos bisectrices de dos rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ secantes constituyen el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas rectas. Por tanto, sus ecuaciones son

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

o bien

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Utilizar la orden *Solve* para resolver la ecuación anterior; se recomienda usar la opción $//N$ en el *Solve* y simplificar el *output* de esta última instrucción. Los resultados de las bisectrices son $b1(x) = -0.531 - 1.109x$ y $b2(x) = 0.878 + 0.901x$.

Al dibujar las dos rectas y las dos bisectrices usar *Plot* con la opción $AspectRatio- > Automatic$ pues sino en el gráfico, las bisectrices no dan la sensación de dividir por la mitad los ángulos de las rectas.

Ejercicio 6: Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 3), B(3, 1)$ y $C(5, 5)$. Determina su centro y su radio. Dibuja la circunferencia y los puntos, éstos últimos con un poco de grosor.
Solución al ejercicio 6: El problema puede resolverse calculando las rectas mediatrices (recta perpendicular por el punto medio) de los segmentos AB y BC. El punto de intersección de ambas mediatrices P es el centro de la circunferencia y el radio es la longitud PA.

Aquí se propone resolverlo de otro modo. Se define la expresión

$$f1 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 \ /. \ \{x \to x1, y \to y1\}$$

donde $x1 = 1, y1 = 3$ son las coordenadas del primer punto previamente asignadas. La instrucción anterior es la fórmula genérica de una circunferencia de centro (a, b) y radio r, en la que se sustituyen x e y por los valores $x1$ e $y1$. Expresiones análogas $f2$ y $f3$ se definen para los puntos B y C. Con la orden *Solve* se resuelve el sistema de ecuaciones $f1 = 0, f2 = 0$ y $f3 = 0$ respecto a las variables a, b y r. El resultado es $r = 5\sqrt{2}/3$, $a = 10/3$ y $b = 10/3$.

Para el gráfico de la circunferencia y los puntos usar la instrucción

$$Show[Graphics[\{PointSize[0.03], Point[\{1,3\}], Point[\{3,1\}], Point[\{5,5\}],$$

$$Circle[\{10/3, 10/3\}, 5\sqrt{2}/3]\}, AspectRatio \to Automatic,$$

$$Axes \to Automatic]]$$

Otros Ejercicios :

Ejercicio : La ecuación implícita $f(x, y) = x^2 + 4x + xy + y^2 + 4 = 0$, representa una curva cónica en el plano. Define dos funciones explícitas $f1$ y $f2$ que correspondan a las dos determinaciones obtenidas al despejar la variable y, y calcula el dominio de estas dos determinaciones. Dibuja dichas funciones $f1$ y $f2$. ¿De qué tipo de cónica se trata?
Solución : Las determinaciones son

$$f1(x) = (-x - \sqrt{-16 - 16x - 3x^2})/2; \quad f2(x) = (-x + \sqrt{-16 - 16x - 3x^2})/2,$$

con dominio $[-4, -4/3]$. Al dibujar conjuntamente $f1$ y $f2$ con un *Plot* y la opción *AspectRatio*$-$ > *Automatic* se observa que se trata de una elipse.

Ejercicio : Se considera la ecuación implícita $f(x, y) = x^2 + 6x - y^2 - 6y - 9 = 0$. Esta ecuación representa una cónica. Al despejar la variable y con la orden *Solve* y obtener dos determinaciones explícitas $f1$ y $f2$, resultan $f1(x) = -3 - \sqrt{x}\sqrt{6+x}$, y $f1(x) = -3 + \sqrt{x}\sqrt{6+x}$; sin embargo deberían haber sido $ff1(x) = -3 - \sqrt{6x + x^2}$ y $ff2(x) = -3 + \sqrt{6x + x^2}$, ¿qué diferencias, en cuanto al dominio de las funciones se refiere, existen entre $f1$ y $ff1$? Evalúa $f1$ y $ff1$ en $x = -10$ y $x = -3$. ¿Qué observas de extraño respecto a

lo que hace *Mathematica* y lo que debería ser? Representa $f1$ y $ff1$ en los intervalos $[-20,-6]$ y $[-20,20]$. Haz dos dibujos $fig1$ y $fig2$ representando $f1$ y $f2$ en $[-20,-6]$ y en $[0,10]$ respectivamente. Representa conjuntamente $fig1$ y $fig2$ con la opción $Show[fig1, fig2]$. ¿De qué tipo de cónica se trata?
Solución : La diferencia entre $f1$ y $ff1$ del enunciado (análogamente entre $f2$ y $ff2$) es que los dominios son diferentes. En efecto, *dom* $f1 = [0,\infty)$ mientras que *dom* $ff1 = (-\infty,-6] \cup [0,\infty)$. A pesar de ello evalúa y dibuja $f1$ en $(-\infty,-6]$ como si se tratase de $ff1$, y se dan dificultades cuando se evalúa y representa en un intervalo que contenga valores de x mayores que -6.

Cuando se representa con la orden *Show* las figuras $fig1$ y $fig2$ se observa que se trata de una hipérbola con los focos y vértices en la recta horizontal $y=-3$.

1.12. Práctica 12: Ecuaciones paramétricas de una curva plana.

A veces se define una curva por su ecuación explícita $y = f(x)$ o por una relación implícita $f(x, y) = 0$. Pero en otras ocasiones puede darse la definición de la curva por medio de sus ecuaciones paramétricas.

Las ecuaciones paramétricas de una curva consisten en un conjunto de dos funciones que dependen de un parámetro real, usualmente designado por la letra t, y un intervalo I de definición del parámetro

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I = [a, b].$$

Para cada valor del parámetro t del intervalo $[a, b]$ se obtiene un punto del plano de coordenadas x e y según la definición dada de $x(t)$ e $y(t)$. Y al recorrer t el intervalo I se describe de manera dinámica una curva. Una de las situaciones donde se emplean frecuentemente las ecuaciones paramétricas es en Física, donde el parámetro es el tiempo (de ahí el tomar la letra t para el parámetro) y el par ordenado $(x(t), y(t))$ representa la posición de un móvil en el instante t. La curva que se describe al recorrer t el intervalo I es la trayectoria del móvil.

En esta práctica se van a representar curvas en paramétricas, se van a calcular rectas tangentes a este tipo de curvas, a calcular puntos de tangente horizontal y de tangente vertical, y a determinar las inflexiones.

Veamos algunos ejemplos. Consideremos las ecuaciones

$$x(t) = 2 + \cos(t), \quad y(t) = -1 + \operatorname{sen}(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Estas ecuaciones definen una circunferencia de centro $(2, -1)$ y radio 1.

Para representar curvas en paramétricas se usa en *Mathematica* la orden *ParametricPlot* especificando las funciones $x(t)$, $y(t)$ y el recorrido del parámetro t; también pueden añadirse opciones adicionales análogas a las usadas en la orden *Plot*. Así, para representar la circunferencia anterior se puede poner

$$ParametricPlot\,[\{2 + Cos[t], -1 + Sin[t]\},\ \{t, 0, 2 * Pi\},$$
$$AspectRatio- > Automatic,\ PlotStyle- > AbsoluteThickness[2]\,]$$

Con la opción *AbsoluteThickness* se puede cambiar el grosor de la línea cambiando el número que aparece.

Hay que dejar claro que en las ecuaciones paramétricas son importantes tanto las funciones de definición $x(t)$ e $y(t)$ como el intervalo I de recorrido del parámetro t. Así, si se cambia el intervalo I aunque se mantengan las funciones x e y, la curva ha cambiado. Por ejemplo, si se repite la instrucción anterior cambiando el intervalo de t y ponemos $\{t, 0, 3Pi/2\}$ la figura que se obtiene es un arco de circunferencia correspondiente a 3/4 de vuelta. También queda claro qué es lo que representa el parámetro; en este caso, t es el ángulo que forma el semirrayo que desde el centro la circunferencia va hacia valores crecientes de x con el semirrayo de posición que parte del centro y va hacia el punto.

En general, las ecuaciones

$$x(t) = x_0 + r\cos(t), \quad y(t) = y_0 + r\,\mathrm{sen}(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

representan una circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r. Probamos, por ejemplo, a representar

$$\begin{aligned}&xx[t\_] = 2 + 3 * Cos[t]; \quad yy[t\_] = -1 + 3 * Sin[t]\\ &ParametricPlot\ [\{xx[t], yy[t]\},\ \{t, 0, 2Pi\},\\ &AspectRatio- > Automatic,\ PlotStyle- > AbsoluteThickness[2]\ ]\end{aligned}$$

que representa una circunferencia de centro $(2, -1)$ y radio 3.

A continuación vamos a representar gráficamente algunas curvas en paramétricas. Utilizamos la instrucción anterior *ParametricPlot* cambiando las funciones $x(t)$ e $y(t)$ y el intervalo I.

Las ecuaciones

$$x(t) = x_0 + a\cos(t), \quad y(t) = y_0 + b\,\mathrm{sen}(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

representan una elipse de centro (x_0, y_0) y semiejes a y b. Notar que la circunferencia es un caso particular de la elipse si se toman los semiejes iguales al radio $a = b = r$. Como ejemplo, tomamos $x(t) = 4\cos(t)$, $y(t) = \mathrm{sen}(t)$, que es una elipse con centro en el origen y semiejes 4 y 1.

Ejemplo: Tomamos

$$x[t\_] = 2 * Cos[t]/(10 + t\hat{}1.1), \quad y[t\_] = Sin[t]/(10 + t\hat{}1.1),$$

cuyos numeradores corresponden a una elipse pero el denominador hace que conforme aumenta el valor del parámetro t, los valores de x e y disminuyan produciendo un efecto de espiralamiento hacia el origen. Probamos para ver el efecto con intervalos del parámetro de $\{t, 0, 2 * Pi\}$ y de $\{t, 0, 11 * Pi\}$. También pueden cambiarse los valores del exponente 1.1 y de la constante 10 del denominador por otros, y observar los efectos.

Otras curvas importantes y con nombre propio son:

1) La **cicloide** definida por $x(t) = t - \text{sen}(t)$, $y(t) = 1 - \cos(t)$. Es periódica con periodo 2π. Representamos tres periodos con la opción $\{t, -2*Pi, 4*Pi\}$.

2) Las **curvas de Lissajous** que aparecen al componer movimientos armónicos. Dependiendo de las frecuencias se obtienen distintas representaciones. Por ejemplo, entre otras podemos probar con

$$x(t) = \text{sen}(2t), \quad y(t) = \cos(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

o bien

$$x(t) = \cos(3t), \quad y(t) = \cos(t) + \text{sen}(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

e incluso el ejemplo del *help* de $Mathematica$,

$$x(t) = \cos(5t), \quad y(t) = \text{sen}(3t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

En estos ejemplos podemos probar también con un rango mayor de valores del parámetro, por ejemplo, $t \in [0, 100\pi]$.

3) La **bruja de Agnesi** cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x(t) = 2\cot(t), \quad y(t) = 2\,\text{sen}^2(t), \quad t \in (0, \pi),$$

aunque se recomienda hacer el dibujo en un intervalo como por ejemplo $t \in (0.2, 3.0)$. ¿Sabe el lector el motivo de eludir un entorno de los valores $t = 0$, y $t = \pi$?

Las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ definen una curva en el plano $x - y$ a través del parámetro t. Si este parámetro se puede eliminar entre las dos ecuaciones anteriores se obtiene una relación funcional $F(x, y) = 0$ entre x e y, y que en algunos casos se puede poner incluso en forma explícita $y = f(x)$ o bien $x = g(y)$. Pero aunque esto no sea posible, aplicando la regla de la cadena se puede obtener la derivada dy/dx. En efecto, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Hay que hacer notar que la derivada dy/dx es una función de t y se puede evaluar en un punto siempre que se dé un valor de t.

Por ejemplo, consideramos la **cardioide** de ecuaciones

$$x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t), \quad y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Si la representamos tiene forma de corazón, de ahí su nombre. Derivando respecto a t, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{2\cos(t) - 2\cos(2t)}{-2\sin(t) + 2\sin(2t)}.$$

Hay puntos especiales en una curva en paramétricas. Los puntos en los que $\dot{x}(t) = 0$ y $\dot{y}(t) = 0$ simultáneamente se llaman **puntos irregulares**. Los puntos en los que $\dot{y}(t) = 0$, pero $\dot{x}(t) \neq 0$, son puntos donde, según lo anterior, $dy/dx = 0$, y por tanto son **puntos de tangente horizontal**. Análogamente, si $\dot{x}(t) = 0$, y $\dot{y}(t) \neq 0$, entonces, $dy/dx = \infty$, y son **puntos de tangente vertical**.

En el ejemplo de la cardioide si hacemos $Solve[D[x[t] == 0, t], t]$ tenemos $t \to 0$, $t \to \pi/3$ y $t \to -\pi/3$. Y si hacemos $Solve[D[y[t] == 0, t], t]$ se obtiene $t \to 0$, $t \to 2\pi/3$ y $t \to -2\pi/3$. Por tanto, para $t = 0$ tenemos un punto irregular, para $t = 2\pi/3$ y $t = -2\pi/3$ hay puntos con tangente horizontal y para $t = \pi/3$ y $t = -\pi/3$ puntos con tangente vertical. Podemos calcular las coordenadas cartesianas de alguno de estos puntos evaluando por ejemplo, $x[2\pi/3] = -1/2$, $y[2\pi/3] = 3\sqrt{3}/2$. Hay que observar que el punto de la cardioide $(x, y) = (-3, 0)$ es un punto de tangente vertical, como se ve en el dibujo, pero no ha sido detectado con la orden $Solve[D[x[t] == 0, t], t]$.

Dibujamos conjuntamente la cardioide y los puntos de tangencia horizontal por ejemplo con las órdenes

$$figu1 = ParametricPlot[\{x[t], y[t]\}, \{t, 0, 2*Pi\},$$

$$PlotStyle \to AbsoluteThickness[1]]$$

$$figu2 = Graphics[\{PointSize[0.02], Point[\{x[0], y[0]\}],$$

$$Point[\{x[2*Pi/3], y[2*Pi/3]\}],$$

$$Point[\{x[-2*Pi/3], y[-2*Pi/3]\}]\ \}]$$

$$Show[figu1, figu2]$$

Otras curvas en paramétricas que se pueden representar son:

1) La **astroide** que tiene forma de estrella, de ecuaciones

$$x(t) = \cos^3(t), \quad y(t) = \text{sen}^3(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

2) Una **rosa de 4 pétalos**, de ecuaciones

$$x(t) = \sin(t)\cos(t)(\sin(t) - \cos(t)),$$

$$y(t) = \sin(t)\cos(t)(\sin(t) + \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Se puede representar también la rosa con el intervalo $\{t, -2, 2\}$ y observar el efecto.

3) Un **lazo**, que tiene por ecuaciones

$$x(t) = t - t^3, \quad y(t) = t^2 - t^4, \quad t \in [-2, 2].$$

Se propone cambiar el intervalo por $t \in [0, 2]$ y $t \in [0, 2\pi]$. En ambos casos se obtiene la mitad del lazo, pero con el segundo intervalo, la escala de los ejes no permite ver el detalle del origen.

También se puede cambiar las funciones x e y y observar cómo repercuten en el dibujo del lazo. Se puede probar con las siguientes

$$x(t) = t - t^3 - t^5, \quad y(t) = t^2 - t^4, \quad t \in [-1, 1].$$

$$x(t) = t - t^3 - t^5, \quad y(t) = t^2 - t^4 + t^6, \quad t \in [-1, 1].$$

$$x(t) = t - t^3 - t^5 + t^7, \quad y(t) = t^2 - t^4, \quad t \in [-1, 1].$$

$$x(t) = t - t^3 - t^5 + t^6, \quad y(t) = t^2 - t^4, \quad t \in [-1, 1].$$

El cálculo de la derivada obtenido anteriormente nos puede servir para obtener la recta tangente a una curva en paramétricas. En efecto, se puede definir la función derivada como

$$yp[t\_] = D[y[t], t]/D[x[t], t],$$

y entonces la recta tangente en un punto $(x(t_0), y(t_0))$ será la función lineal

$$t[x\_] = y[t_0] + yp[t_0] * (x - x[t_0]).$$

Por ejemplo, para la curva

$$x(t) = 1/(t^2 + 1), \quad y(t) = t^3,$$

la derivada sale $yp(t) = -(3/2)t(1+t^2)^2$ y la recta tangente en el punto $t = 2$ es

$$t[x\_] = y[2] + yp[2] * (x - x[2]),$$

que resulta $y = 8 - 75(x - 1/5)$.

La curva y la recta tangente se pueden representar conjuntamente mediante las instrucciones

$$fig1 = ParametricPlot[\{1/(t^2-1), t^3\}, \{t, -3, 3\},$$
$$PlotStyle \to AbsoluteThickness[1]]$$
$$fig2 = Plot[t[x], \{x, 0.1, 1\}, PlotStyle \to AbsoluteThickness[1]]$$
$$Show[fig1, fig2]$$

La curva de la bruja de Agnesi representada antes es una función par, simétrica respecto al eje OY, tiene dos inflexiones; vamos a determinar la que está en el primer cuadrante. Para calcular las inflexiones hay que hallar la derivada segunda y obtener sus ceros. La derivada segunda se deduce derivando la derivada primera. Es decir, si $yp(t)$ es la derivada primera obtenida mediante $\dot{y}(t)/\dot{x}(t)$, entonces la derivada segunda será

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(yp(t))}{dx} = \frac{d(yp(t))/dt}{dx/dt}.$$

Cuidado que son cosas diferentes y es un error frecuente tomarlas como igual,

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}.$$

Las correspondientes instrucciones en *Mathematica* para las derivadas primera y segunda serán

$$yp[t\_] = D[y[t], t]/D[x[t], t]$$

$$ypp[t\_] = D[yp[t], t]/D[x[t], t].$$

En el caso de la curva de la bruja de Agnesi de ecuaciones $x(t) = 2\cot(t)$, $y(t) = 2\,\mathrm{sen}^2(t)$, se obtiene $yp(t) = -2\cos(t)\,\mathrm{sen}^3(t)$, y $ypp(t) = -(1/2)\,\mathrm{sen}^2(t)(-6\cos^2(t)\,\mathrm{sen}^2(t) + 2\,\mathrm{sen}^4(t))$.

Si calculamos los ceros con $Solve[ypp[t] == 0, t]$ se tienen los valores $t = 0, -2\pi/3, -\pi/3, \pi/3, 2\pi/3$. El punto del primer cuadrante es para $t = \pi/3$.

La curva y el punto de inflexión se pueden dibujar en un mismo gráfico con las instrucciones

$$fig1 = ParametricPlot[\{2\cot(t), 2\,\mathrm{sen}^2(t)\}, \{t, 0.3, 2.9\},$$
$$PlotStyle- > AbsoluteThickness[1]]$$
$$fig2 = Graphics[\{PointSize[0.02], Point[\{x[Pi/3], y[Pi/3]\}]\}]$$
$$Show[fig1, fig2]$$

1.13. Práctica 13: Series numéricas. Series de potencias de Taylor.

Series numéricas.

Dada una sucesión de números reales $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$, a veces interesa sumar algunos de sus términos o todos ellos. Cuando se suma un número finito de términos aparece el concepto de *suma parcial*. Las sumas parciales asociadas a la sucesión $\{a_n\}$ son $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, y en general, la suma parcial $n-$ésima es la suma de los n primeros términos; es decir,

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Aparece así, una nueva sucesión $\{s_n\}$, la sucesión de sumas parciales, asociada a $\{a_n\}$. Si queremos calcular la suma de un número finito de términos de $\{a_n\}$, basta calcular el término correspondiente de $\{s_n\}$, por ejemplo $a_1 + \ldots + a_{10}$, la suma parcial 10 de $\{a_n\}$, es igual a s_{10}, el término 10 de $\{s_n\}$.

Pero el cálculo de la suma de los infinitos términos de $\{a_n\}$, es un asunto más delicado por el simple hecho de tener que sumar un número infinito de cosas. El resultado puede existir o no, puede ser finito o infinito.

Se llama *serie* de $\{a_n\}$, a la suma de los *infinitos* términos de $\{a_n\}$, y se define como el límite de la sucesión de sumas parciales, es decir

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

En el caso de que el límite anterior exista, se dice *serie convergente* y el valor del límite es la *suma de la serie*. Será

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = s = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Si el límite no existe la serie es *divergente*.

Ejemplo: Consideramos la sucesión $a, a\cdot r, a\cdot r^2, \ldots$ que es una sucesión *geométrica*. La sucesión de sumas parciales es $s_n = a + a\cdot r + a\cdot r^2 + \ldots + a\cdot r^{n-1}$ que se puede poner, operando $s_n - r.s_n$ como

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \qquad r \neq 1.$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ se tiene que la serie converge si $|r| < 1$, y la suma de la serie es

$$s_\infty = \frac{a}{1-r}$$

La serie geométrica diverge si $|r| > 1$.

Por ejemplo, la serie geométrica siguiente es convergente,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Pero

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{16}{8} + \ldots = +\infty,$$

es divergente pues es una serie geométrica de razón 3/2, mayor que 1.

Estudiar el *carácter de una serie*, determinar si es convergente o divergente, es un asunto importante y, a veces nada fácil de saber. De hecho, hay series que parecen ser convergentes y no lo son, por ejemplo la *serie armónica* de término general $1/n$ se puede probar que es divergente,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty.$$

Veamos cómo manejar las series con el programa de $Mathematica$. Comenzamos con un ejemplo. Consideramos una sucesión y definimos el término general como una función del subíndice; es decir

$$a[k\_] = 1/(4 * k\hat{\ }2 - 1)$$

Calculamos una suma parcial, por ejemplo, s_{10} poniendo

$$s10 = a[1] + a[2] + a[3] + a[4] + a[5] + a[6] + a[7] + a[8] + a[9] + a[10].$$

Y su aproximación decimal poniendo $s10//N$. Si se quiere calcular una suma parcial elevada, de un gran número de términos, se hace necesario realizarlo con unas instrucciones que definen unos *bucles iterativos* que se realizan un número predeterminado de veces. Entre los más usados está: Do y For. La forma general es

$$Do[proceso, \{indice, iini, ifin, ipas\}]$$

Se realiza el proceso que se indique para el valor inicial del $indice$ igual a ini hasta el valor final de $ifin$, incrementándose en cada iteración en el valor de paso $ipas$. Si no se pone $ipas$ se toma igual a 1.

Así,el cálculo de $s10$ puede hacerse más elegante con la orden Do en la forma

$$ss = 0.0; \quad Do[ss = ss + a[i], \{i, 1, 10, 1\}]; \quad ss$$

La variable ss es lo que se llama un *acumulador*; empieza valiendo 0, y al ejecutar el Do para $i = 1$ será $ss = 0 + a[1]$, a continuación para $i = 2$, $ss = a[1] + a[2]$, para $i = 3$ el valor de ss se incrementa en $a[3]$ y así sucesivamente, en ss se van acumulando los valores de $a[i]$ hasta $i = 10$. Al final se escribe ss que será la suma de los 10 primeros términos. El resultado es el mismo que antes.

Ahora es inmediato calcular la suma de un número cualquiera de términos, por ejemplo, para obtener la suma de los 1000 primeros términos, basta poner $\{i, 1, 1000, 1\}$ como índices del Do.

La orden For es parecida; su expresión general es

$$For[ind = iini, icond, iincr, proceso]$$

Ahora el proceso, que es el último argumento del For se realiza para el valor inicial del índice ind igual a $iini$ y mientras se cumpla la condición del índice $icond$ y en cada paso el índice se incrementa en $iincr$. Así, la orden equivalente para sumar los 10 primeros términos es

$$ss = 0.0; \quad For[i = 1, i <= 10, i = i + 1, ss = ss + a[i]]; \quad ss$$

Ejecutar las instrucciones anteriores y comprobar que se obtiene lo mismo que en los otros casos.

$Mathematica$ tiene una orden directa para calcular una suma parcial, y es

$$Sum[expresion, \{ind, iini, ifin, ipas\}]$$

donde las variables que aparecen tiene el mismo significado que en el Do. La suma de los 10 primeros términos será

$$Sum[1/(4 * k\hat{}2 - 1), \{k, 1, 10\}]$$

donde el valor de $ipas$ es igual a 1 por no haber sido especificado.

Ejercicio: Utilizamos la orden Sum para calcular la suma desde el término 4 hasta el 13 de la sucesión $\{(2k - 1)/(k + 3)^k\}$. El resultado es 0.003213. donde $ipas$ es igual a 1 pues no se ha especificado.

Ejercicio: Utilizamos la orden Sum para calcular la suma desde el término 4 hasta el 13 de la sucesión $\{(2k - 1)/(k + 3)^k\}$. El resultado es 0.003213.

Ejercicio: Calcula con la orden *Sum* la suma desde el término 1 hasta el 900 de la sucesión cuyo término general es$1/2^k$. El resultado es 1.

Para calcular la suma de la serie, es necesario sumar los infinitos términos. Esto se consigue poniendo en *Sum* el valor de $ifin$ igual a infinito. La instrucción

$$Sum[1/2\hat{}k, \{k, 1, Infinity\}]$$

calcula el valor de la serie que resulta ser 1.

Ejercicio: Obtén el valor de la serie convergente $\sum 5^n/n!$. Su valor es $-1 + E^5$.

Ejercicio: La serie $\sum 1/k^2$ es convergente y su suma está relacionada con el número π. En efecto, calcula su suma y verifica que es $\pi^2/6$.

Ejercicio: Las series $\sum 1/k^{1.001}$ y $\sum 1/k$ parecen muy semejantes. Nada más lejos de la realidad. La primera es convergente, comprueba que su suma es 1000.58; la segunda es la *serie armónica* y puedes comprobar con *Sum* que es divergente.

Ejercicio: La serie $\sum(-1)^k(1/k) = -1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 - 1/5 + \ldots$ es la *serie armónica alterna*. Comprueba que es convergente y que su suma es $-\log(2) \approx -0.693147$. Calcula también la suma parcial de los 100 primeros términos usando la orden *Do*.

Ejercicio: Comprueba que la serie $\sum \log_{10}(n)/\sqrt{n(n+1)}$ es divergente. Busca en el *help* la sintaxis del logaritmo decimal y comprueba que $\log_{10}(100) = 2$, para asegurarte.

Series de potencias de Taylor.

Una serie de potencias es una expresión de la forma

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots$$

La serie de potencias se dice que está centrada en x_0, porque está expresada en potencias de $(x - x_0)$. Para un valor concreto de la variable x, la serie de potencias se convierte en una serie numérica. Para algunos valores de x la serie numérica será convergente y tendrá sentido su suma; mientras que para otros valores de x la serie numérica será divergente. El conjunto de valores donde la serie de potencias converge se dice *dominio de convergencia*. No vamos a estudiar los dominios de convergencia pero sí conviene saber que cada serie de potencias tiene un dominio de convergencia asociado y que la serie de potencias sólo tiene sentido en su dominio de convergencia.

De entre las series de potencias más importantes están las *series de Taylor*, o *desarrollos de Taylor*. Una serie de Taylor asociada a una función $f(x)$, derivable tantas veces como sea necesario, es una serie de potencias cuyos coeficientes son

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!},$$

donde $f^{(i)}(x_0)$ es la derivada $i-$ésima de f evaluada en x_0. La serie de Taylor de f en x_0 será

$$f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Sin preocuparnos del cálculo del dominio de convergencia, si la serie de Taylor la truncamos en un término finito, aparece un polinomio que se dice *polinomio de Taylor de grado n de f.* El polinomio de grado 4 será

$$f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Hay que hacer notar que el polinomio de Taylor de grado 1 no es otra cosa que la tangente a la curva en un punto. En efecto,

$$p1(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0),$$

es la recta tangente.

Para calcular la derivada de orden i de una función se pone en $Mathematica$ la instrucción $D[f[x], \{x, i\}]$.

Tomemos como ejemplo la función logaritmo neperiano y calculamos sus primeras derivadas, y las asociamos a funciones fi del siguiente modo

$$f[x\_] = Log[x]; \quad f1[x\_] = D[f[x], x]; \quad f2[x\_] = D[f[x], \{x, 2\}]$$

$$f3[x\_] = D[f[x], \{x, 3\}]; \quad f4[x\_] = D[f[x], \{x, 4\}]$$

Calculamos el polinomio de Taylor de grado 4 en $x = 1$,

$$p4[x\_] = f[1] + f1[1](x - 1) + (f2[1]/2!)(x - 1)\hat{}2+$$

$$(f3[1]/3!)(x - 1)\hat{}3 + (f4[1]/4!)(x - 1)\hat{}4$$

y resulta

$$(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4$$

En $Mathematica$ se puede conseguir la serie de Taylor de una función con una orden específica que es

$$Series[f[x], \{x, x_0, n\}].$$

Esto es el polinomio de Taylor de grado n de f centrado en x_0. Así $p4$ se puede conseguir directamente con

$$Series[Log[x], \{x, 1, 4\}].$$

Si ahora representamos conjuntamente la función f en color rojo y el polinomio $p4$ en verde, en el intervalo [0,3] observamos que en un entorno del punto $x = 1$ que es donde está centrada la serie de Taylor, las dos curvas están muy próximas. Esto ocurre casi siempre (salvo casos de funciones algo especiales), la función y su polinomio de Taylor de grado n se aproximan bien cerca del centro x_0 de la serie. Y además, cuanto mayor es el grado n del polinomio mejor aproximación cerca de x_0 se consigue.

Ejercicio: Calcula con la orden *Series* el polinomio $p8$ de grado 8 de Taylor de $f(x) = \log(x)$ centrada en $x = 1$. Representa conjuntamente f, el polinomio $p4$ obtenido antes y $p8$. Observa que $p8$ se aproxima mejor a f que $p4$, se resiste antes a abandonar el grafo de f; pero que lejos del $x = 1$ fracasan las aproximaciones $p4$ y $p8$ de f. Observa también que como la función $\log(x)$ no es continua en 0, cerca de ese punto no puede aproximarse la función por ningún polinomio aunque se aumente el grado.

Ejercicio: Calcula el desarrollo de Taylor en 0 de orden 8 de la función seno. Observa que los polinomios de Taylor de distinto grado de esta función tienen sólo potencias impares de x. Por eso la función seno se dice que es función impar.

Ejercicio: Calcula el desarrollo de Taylor en 0 de orden 8 de la función $y = \cos(x)$. Observa que los polinomios de Taylor de distinto grado de la función coseno tienen sólo potencias pares de x.

Ejercicio: Considera una función genérica $y = g(x)$. Comprueba usando la orden $Series[g[x], \{x, 1, 5\}]$ que se obtiene el desarrollo de Taylor de orden 5.

Ejercicio: Halla el desarrollo de Taylor en 0 de orden 5 de la función arco tangente. A la vista del resultado, ¿puedes deducir si esta función es par o impar? Representa en un mismo dibujo la función arco tangente y $p5$ su polinomio de Taylor de grado 5 en 0. A la vista del dibujo, comenta propiedades de la paridad de la función arco tangente y de los límites en $+\infty$ y $-\infty$.

Los desarrollos de Taylor sirven para calcular límites sustituyendo funciones complicadas por sus desarrollos de Taylor o por polinomios de Taylor de un cierto grado. Así, por ejemplo, el límite conocido de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

que permite decir que $\operatorname{sen}(x)$ y x son *equivalentes* cuando $x \approx 0$, se entiende claramente si el seno se sustituye por su desarrollo de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/6 + x^5/120 + O(x)^7}{x} = 1.$$

Del mismo modo, usando desarrollos se ve claro el valor de los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{2x^3} = \frac{-1}{12}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2/2 - \cos(x)}{x^6 - x^4/3} = \frac{1}{8},$$

ya que de los desarrollos se sigue que para $x \to 0$, se tienen las equivalencias $\operatorname{sen}(x) - x \approx -x^3/6$ y $1 - x^2/2 - \cos(x) \approx -x^4/24$.

Ejercicio: Comprueba los dos límites anteriores usando la orden *Limit* de *Mathematica*, primero poniendo la función y luego poniendo en su lugar un polinomio de Taylor de grado adecuado. El resultado debe ser el mismo.

Para usar los desarrollos de Taylor en el cálculo de límites es necesario que el desarrollo se haga tomando como centro, el punto donde se calcula el límite. Así, para el límite

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\arctan(x) - x}{2x^3}$$

no puede usarse el desarrollo de arco tangente en $x = 0$. Comprueba con *Mathematica* que el límite anterior es 0. Esto está de acuerdo con que la función arco tangente está acotada (observa el gráfico obtenido antes).

Sin embargo, sí que podemos usar el desarrollo en 0 para el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{2x^3}.$$

Ejercicio: Halla $p5$, el polinomio de Taylor de grado 5 en 0 de arco tangente. Calcula el siguiente límite anterior, primero con la función arco tangente y después sustituyendo la función por $p5$. Los dos valores deben coincidir.

Ejercicio: Calcula el polinomio de grado 4 en 0 de la función $y = \exp(\cos(x))$. Representa conjuntamente la función y el polinomio.

Ejercicio: Calcula el desarrollo hasta orden 4 en 0 de la función $f(x) = (2x-5)/(x^2-5x+6)$. Descompón la fracción anterior en fracciones simples. Haz los desarrollos de las fracciones simples resultantes y comprueba que operando estos desarrollos podemos recuperar el desarrollo de la función dada f.

1.14. Práctica 14: Integrales indefinidas. Integrales definidas. Aplicaciones.

Integrales Indefinidas.

Dada una función $f(x)$, la función $F(x)$ se dice *primitiva* de $f(x)$ o *integral indefinida* de *f(x)* si $F'(x) = f(x)$. Esto se denota por

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se sabe por teoría que cualquier función de la forma $F(x) + k$, con k una constante arbitraria también es primitiva y que fuera de ese conjunto de funciones no hay más primitivas de $f(x)$. Es suficiente, por tanto, conocer una primitiva cualquiera para tenerlas todas; basta añadir una constante aditiva.

En *Mathematica* hay un comando para calcular las integrales indefinidas o primitivas que es

$$Integrate[f[x], x].$$

Hay que notar que *Mathematica* responde con una función primitiva particular (sin constante de integración).

Ejemplo: Calcula la integral indefinida de x^5-2x escribiendo $Integrate[x\hat{}5-2*x, x]$. Observa que en el *out* no hay constante de integración.

Ejemplo: $Mathematica$ hace también integrales más complicadas; por ejemplo, calcular la integral de $e^{ax}\operatorname{sen} bx$ que , a mano, se hace por partes dos veces. Comprueba por derivación del *out* que el resultado es una primitiva; utiliza la orden $Simplify[D[''out'', x]]$.

Ejemplo: También podemos calcular integrales racionales. Cuando se hacen a mano hay que descomponer en fracciones simples. Considera la función racional $f(x) = x/(-4 - 4x + x^2 + x^3)$. Halla la integral de $f(x)$. Utiliza la orden *Apart*$[f[x]]$ para obtener la descomposición en fracciones simples de $f(x)$ y observa que la integral obtenida antes es la que se obtiene integrando cada una de las fracciones simples obtenidas con *Apart*. Deriva la primitiva para comprobar que recuperamos la función $f(x)$.

Ejemplo: $Mathematica$ calcula integrales trigonométricas. Calcula la integral de $f(x) = \tan^4(x)$. Comprueba derivando y simplificando el resultado que se obtiene f. Debido a las relaciones que hay entre las funciones trigonométricas, podemos tener expresiones muy diferentes de una primitiva de f. La mejor manera de comprobar que se trata de otra primitiva de la misma función es derivar y observar que resulta lo mismo. Así, por ejemplo, $\tan^3(x)/3 - \tan(x) + x$ es también primitiva de $\tan^4(x)$ y no se parece en nada a la primitiva dada por $Mathematica$; compruébalo por derivación.

Ejemplo: Cálculo de integrales irracionales. Halla la integral de $x^2/\sqrt{2x - x^2}$. Comprueba el resultado por derivación.

Hay algunas integrales que no tienen primitiva; es decir que no existe $\int f(x)dx$; que no existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. En estos casos $Mathematica$ responde con la misma expresión o con alguna función nueva que corresponde a la *función integral*. (Véase integrales definidas). Dicha función integral puede ser dibujada.

Ejemplo: La función $\operatorname{sen}(x)/x$ no tiene primitiva. Usa el comando $Integrate$ para comprobarlo. $Mathematica$ responde con $SinIntegral[x]$. Esto es la función integral de $\operatorname{sen}(x)/x$ que el *seno integral*. Utiliza la orden $Plot$ en el intervalo $[-20, 20]$ para dibujarla. Observa que es una función impar y que presenta oscilaciones que se van amortiguando conforme x aumenta.

Ejemplo: La función $\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2(x)}$ tampoco tiene primitiva. Su función integral es una función elíptica $EllipticE[x, 1/4]$. Esta función se parece a $y = x$, pero no son idénticas. Representa conjuntamente en el intervalo $[-10, 20]$ la función elíptica $EllipticE[x, 1/4]$ y x para diferenciarlas.

Ejemplo: Otra función sin primitiva es $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))$. Compruébalo usando $Mathematica$.

Integrales Definidas.

La integral de Riemman de una función $f(x)$ entre las abcisas $x = a$ y $x = b$ se escribe como

$$\int_a^b f(x)dx.$$

La expresión anterior se llama también *integral definida* de f entre a y b. La integral definida es un número y se sabe que si f es continua en $[a, b]$ representa el área limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Las áreas situadas por encima del eje OX se consideran con signo positivo y las situadas por debajo con signo negativo. Así por ejemplo,

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 -xdx = -\frac{1}{2}, \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)dx = 0.$$

La variable x de integración es una variable muda de modo que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Y si se toma $b = x$ variable, aparece el concepto de *función integral de f*,

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Se prueba que dicha función integral I es una primitiva de f; es decir que $I'(x) = f(x)$.

Usando esta función integral se deduce la famosa regla de Barrow para calcular integrales definidas: Si $f(x)$ tiene alguna primitiva (integral indefinida), $F(x)$, entonces se puede calcular la integral definida por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Si existe $\int_a^b f(x)dx$ se dice que *f es integrable en [a,b]*. Es claro que si f tiene una primitiva F, entonces f es integrable y su integral se puede calcular por la regla de Barrow; pero puede que f sea integrable a pesar de no tener primitivas. En efecto, la función $f(x) = |x|$ no tiene primitivas en $[-1, 1]$ porque en $x = 0$ la función no es derivable, no hay recta tangente definida. Sin embargo, $|x|$ es integrable en [-1,1], existe la integral

$$\int_{-1}^1 |x| = 1.$$

En $Mathematica$ la orden que calcula directamente integrales definidas es

$$Integrate[f[x], \{x, a, b\}]$$

Ejemplo: Comprueba usando el comando $Integrate$ que $\int |x|dx$ no existe y que $\int_{-1}^1 |x| = 1$.

Cuando la función f corta al eje OX para calcular el área encerrada entre $y = f(x)$ y el eje OX es necesario localizar los puntos de corte con el eje OX, haciendo $y = 0$ e integrar f en los intervalos en que f es positiva e integrar $-f$ donde f es negativa. Otra opción equivalente es integrar $|f|$, calcular $\int_a^b |f|$ pero esta última opción a veces no funciona en $Mathematica$.

Ejemplo: Considera la función $y = x^2 - 1$. Haz un dibujo de la función en [0,2]. Observa dónde la función es positiva, negativa y dónde se anula. Utiliza la orden $Solve$ para localizar los puntos de corte con OX. Calcula la integral de $|x^2 - 1|$ en [0,2]. Calcula la integral de $-(x^2 - 1)$ en [0,1] más la integral de $x^2 - 1$ en [1,2], y observa que se obtiene el mismo resultado de antes.

Ejemplo: Calcula la integral de $\text{sen}(x)$ en el intervalo variable $[0, t]$. La expresión obtenida es una función integral de $\text{sen}(x)$, derívala respecto a su variable t para recuperar la función seno.

Ejemplo: De modo análogo al ejemplo anterior, comprueba que integrando $1/x$ en $[1, t]$ se tiene la función integral $Log[t]$, y deriva ésta para probar que el logaritmo es una primitiva de $1/x$.

A veces interesa una aproximación decimal del resultado dado por *Mathematica* en lugar de su expresión simbólica. Esto se puede conseguir añadiendo la opción $//N$ al comando $Integrate$,

$$Integrate[f[x], \{x, a, b\}]//N$$

o por medio del comando

$$NIntegrate[f[x], \{x, a, b\}]$$

que calcula la integral con un algoritmo numérico.

Ejemplo: Calcula con los comandos $Integrate$ y $NIntegrate$ la integral de $\text{sen}(x)$ entre 0 y 1.

Análogamente a lo anterior, el área encerrada entre dos curvas f y g se calcula obteniendo los puntos de corte de ambas curvas con la orden $Solve$, y hallando la suma de las integrales de $f - g$ en los intervalos en que $f > g$ y de las integrales de $g - f$ en los intervalos en que $g > f$. También puede calcularse de equivalentemente la integral del valor absoluto de la diferencia $|f - g|$, pero esta segunda opción en algunos casos no da resultado.

Ejemplo: Define la parábola $f(x) = x^2 + x$ y la recta $r(x) = -x + 1$. Dibuja ambas curvas en [-3,3]. Halla los puntos de corte de estas funciones con la orden $Solve$. Calcula el área encerrada entre ambas curvas en el intervalo [-2,2], para ello observa que en un subintervalo de [-2,2] es $r > f$ y en otro subintervalo es $f > r$; toma el signo adecuado del integrando (debe ser positivo) y suma las dos integrales. El resultado es $14/3 + 8\sqrt{2}/3$. Calcula su valor decimal. Comprueba que la integral de $|r(x) - f(x)|$ no da ningún valor.

Ejemplo: Calcula el área de un semicírculo de radio 1 por medio de la integral de $\sqrt{1 - x^2}$ en [-1,1]. Haz $r = 8$ y calcula la integral de $\sqrt{r^2 - x^2}$ en $[-r, r]$ que es el área de un semicírculo de radio 8. Desasigna el valor de r por medio de $r = .$ y observa que no calcula la integral de $\sqrt{r^2 - x^2}$ para r variable que representaría el área de un semicírculo de radio r. Para parar el cálculo es necesario entrar en el $Kernel$ de $Mathematica$ y elegir $AbortEvaluation$.

En algunos casos *Mathematica* nos da el resultado de la integral expresado en términos de funciones poco conocidas, por ejemplo, para la siguiente integral al usar el comando *Integrate* resulta

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, FresnelS\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$$

Si usamos el comando *NIntegrate* nos da una aproximación decimal del valor de la integral $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx = 0.310268$.

En otros casos no puede calcular la integral como en el siguiente ejemplo en el que hay que hacer la integral a trozos.

Ejemplo: Comprueba que *Integrate* no es capaz de calcular la integral de $|f(x)| = |(x-1)(x^3+2)|$ en [-3,2]. Dibuja la función anterior en dicho intervalo. Utiliza la orden *NSolve* para localizar las dos raíces reales x^* y 1 de $|f| = 0$. Utiliza la orden *Solve* y observa que los resultados en forma de radicales no parecen suficientemente claros; por ejemplo, $(-2)^{1/3}//N$ muestra que esta raíz es compleja. Calcula la integral pedida como suma de tres integrales

$$\int_{-3}^{2} |f| = \int_{-3}^{x^*} f + \int_{x^*}^{1} (-f) + \int_{1}^{2} f.$$

El resultado es 64.0346.

En *Mathematica* también se pueden calcular las llamadas *integrales impropias*. Un tipo de integral impropia es aquella que tiene algún límite de integración a o b o ambos que es infinito. Así, tenemos tres integrales impropias,

$$\int_a^{\infty} f; \qquad \int_{-\infty}^{b} f; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f.$$

Estas integrales impropias se definen como límite de una integral propia en la que el extremo del intervalo de integración se hace tender a infinito. La integral impropia está bien definida si y sólo si tal límite existe. Las tres integrales anteriores se definen respectivamente por

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{n} f; \qquad \lim_{n\to-\infty} \int_n^{b} f; \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f.$$

En *Mathematica* la sintaxis para calcular integrales impropias es

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = Integrate[f[x], x, 1, +Infinity]$$

y análogamente para los otros casos.

Ejemplo: Dibuja la función $f(x) = 1/(1+x^2)$ en el intervalo [0,10]. Observa que el eje OX es asíntota horizontal de la función y que el área comprendida entre la función y el eje OX en un intervalo de la forma $[n, n+1]$ con n entero, va siendo cada vez más pequeño. Calcula la integral de f en $[1, n]$. Halla el límite cuando n tiende a infinito de la integral anterior. Como este límite existe, su valor es el de la integral impropia. Observa que se obtiene el mismo resultado de $\pi/4$ calculando la integral impropia por medio de la orden

$$Integrate[1/(1+x\hat{}2), \{x, 1, +Infinity\}]$$

.

Ejemplo: Dibuja la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo [1,20]. Observa que $y = 0$ es asíntota horizontal y que el área entre la curva y el eje OX es cada vez más pequeña. Calcula la integral de f en el intervalo $[1, n]$ y luego toma límite cuando $x \to \infty$. Este límite no existe, luego la integral impropia no está definida. Calcula directamente la integral de 1 a infinito, y obtén el mismo resultado que con el límite.

Ejemplo: El estudio de la función $y = Exp(-x^2)$ tiene interés en varios campos de la ciencia, en particular en Estadística. Dibuja la función en el intervalo [-4,4] y observa que el eje OX es asíntota horizontal y que, como en los dos ejemplos anteriores, el área entre la curva y el eje de abcisas va siendo cada vez más pequeño conforme x crece. Usa la orden $Integrate$ para notar que esta función no tiene primitiva en funciones elementales. $Mathematica$ responde con su función integral que es la llamada *función de error Erf[x]*, en concreto el *out* es $(\sqrt{\pi}/2)Erf[x]$. Emplea el comando $NIntegrate$ para calcular el área entre la curva y el eje OX en el intervalo [1,3]. Usa también este comando para calcular la integral impropia desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El resultado es 1.77245.

Ejemplo: Calcula el área encerrada entre $y^2 = 1-x$ y la recta $y = (x+2)/2$. Para ello despeja y de la primera curva y obtén dos determinaciones. Dibuja conjuntamente las dos determinaciones y la recta. Halla los puntos de corte de las determinaciones con la recta. Observa que el área pedida es

$$\int_{-8}^{0} \frac{x+2}{2} - (-\sqrt{1-x})dx + \int_{0}^{1} \sqrt{1-x} - (-\sqrt{1-x})dx$$

El resultado es 32/3.

NOTA: El cálculo de integrales definidas se necesita, además de en el cálculo de áreas, también en el cálculo de longitudes, volúmenes y superficies.

Cálculo de longitudes de curvas.

Por teoría se sabe que dado un arco de curva en coordenadas cartesianas $y = f(x),\ x \in [a, b]$ su longitud viene dada por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Si la curva está dada en forma paramétrica $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_0, t_1]$ la fórmula a usar es

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

Ejemplo: Calculamos la longitud de la curva $y = x^2 - 2 * x + 5$ en $x \in [1, 2]$. Comenzamos dibujando la curva con un *Plot* y observamos que la longitud debe ser mayor que $\sqrt{2}$ que es el segmento que une los extremos. Calculamos la derivada de f con la orden $D[f[x], x]$ o con $f'[x]$ (atención al tipo de acento). Calculamos la longitud con la orden

$$Integrate[Sqrt[1 + f'[x]\hat{}2], \{x, 1, 2\}]$$

Observamos que el resultado contiene una nueva función $ArcSinh[x]$, el *arco seno hiperbólico*. Esta función hiperbólica se puede representar con un *Plot*. Si queremos una aproximación decimal de la longitud se puede emplear *NIntegrate*. El resultado es 1.47894.

Ejemplo: Longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$. Con un *Solve* despejamos y de la ecuación y obtenemos las dos determinaciones que corresponden a la semicircunferencia inferior y superior. Hallamos con *Solve* las raíces del radicando para decidir cuando el radicando es positivo y de ahí el dominio de las determinaciones, que resulta el intervalo $[-3-\sqrt{34}, -3+\sqrt{34}]$. Hacemos un *Plot* de las dos determinaciones en ese intervalo para dibujar la circunferencia (usar $AspectRatio \rightarrow Automatic$). Haciendo un ajuste a cuadrados escribiendo $(x+3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 21$ decidimos que el centro es (-3,-2) y el radio $r = \sqrt{34}$, lo cual concuerda con el dibujo. Conocido el radio, la longitud de la circunferencia se sabe que es $2\pi r = 2\pi\sqrt{34}$, pero se puede calcular como el doble de la longitud de una semicircunferencia, es decir, eligiendo una cualquiera de las determinaciones, por ejemplo $-2 + \sqrt{25 - 6x - x^2}$ y si fp es su derivada, la expresión

$$long = 2 * Integrate[Sqrt[1 + fp[x]^2], \{x, -3 - \sqrt{34}, -3 + \sqrt{34}\}]$$

da la longitud. Observad que hay un mensaje de no poder chequear la convergencia, pero el resultado es correcto. No se puede calcular la longitud usando $NIntegrate$, es debido a que en los extremos, la semicircunferencia tienen pendiente infinito. Puede usarse $NIntegrate$ pero tomando una aproximación ligeramente por defecto de $\sqrt{34} \approx 5.83095$, por ejemplo integrando en $[-3 - 5.8309, -3 + 5.8309]$. La longitud resultante es 36.5385.

NOTA: Longitud de la elipse de semiejes 3 y 4 definida por las ecuaciones paramétricas $x(t) = 4\cos(t)$, $y(t) = 3\,\text{sen}(t)$ para $t \in [0, 2\pi]$. Primero dibujamos la elipse con $PamametricPlot$. Calculamos las derivadas respecto de t de $x(t)$ e $y(t)$. La longitud se obtiene con la expresión

$$Long = Integrate[Sqrt[(x'[t])^2 + (y'[t])^2], \{t, 0, 2 * Pi\}]$$

En el resultado aparece una función elíptica *EllipticE* evaluada en -7/9. Puede calcularse una aproximación decimal usando $NIntegrate$. Observar que el valor es cercano a $2\pi semi$ siendo $semi = (3 + 4)/2$ la semisuma de los semiejes.

1.15. Práctica 15: Funciones de dos variables.

Funciones de varias variables.

Observación: Antes de nada se advierte que las gráficas en tres dimensiones son superficies y ocupan gran cantidad de memoria. Por ejemplo el documento de *Mathematica* con las gráficas de esta práctica ocupa 3710 *kb* por lo que se aconseja que sean borradas una vez visualizadas y si no van a ser utilizadas después. Se puede conservar tan solo la instrucción en *Mathematica* que la ha generado. Este mismo documento de la práctica sin las gráficas ocupa sólo 29 *kb*.

Una función de varias variables, de n variables, es una expresión de la forma $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. En nuestra práctica con *Mathematica* nos limitamos a funciones de dos variables, comúnmente x e y, y será una relación funcional de la forma $z = f(x, y)$. Un ejemplo en notación de *Mathematica* es

$$f[x_-, y_-] = Sin[x * y]$$

El dominio de definición de la función es el conjunto de valores en los que la expresión tiene sentido, puede ser evaluada. No nos preocupamos de calcular dominios de funciones de varias variables, simplemente mandamos dibujar la función y si no se puede evaluar, el manipulador nos dará un aviso.

La orden de dibujar en Mathematica es *Plot3D*. Buscando en el *help* del manipulador, podemos traernos la instrucción

$$Plot3D[Sin[x\ y], \{x, 0, 4\}, \{y, 0, 4\}, PlotStyle \to 40, Mesh \to False,$$

$$FaceGrids \to All, AxesLabel \to \{''Length'','' Width'','' Height''\}];$$

Para la orden *Plot3D* tan solo son indispensables dar la definición de la función, en el caso anterior $Sin[x\ y]$ y el rectángulo del plano XY en que se representa $\{x, y\} \in [0, 4] \times [0, 4]$. Las distintas opciones que aparecen después no son obligatorias y tienen distintos efectos sobre el dibujo. Hay más opciones que pueden verse en el *help*. La mejor manera de comprender el resultado que tienen sobre el dibujo es modificarlas o quitarlas y comparar los dos dibujos. Así podemos repetir la orden *Plot3D* poniendo $Mesh \to True$ y quitando el *FaceGrids*.

Para ver el dibujo *Mathematica* elige un punto de vista de observación que por defecto es el (1.3,-2.4,2). Este punto es adecuado en la mayoría de dibujos pero en algunos casos puede interesar cambiar el punto de vista; esto se hace con la opción $ViewPoint$. Podemos repetir el dibujo eligiendo y cambiando el punto de vista, por ejemplo ejecutar

$$Plot3D[Sin[x\ y], \{x, 0, 4\}, \{y, 0, 4\}, PlotStyle \to 40, Mesh \to True,$$

$$AxesLabel \to \{''Long'','' Anch'','' Alt''\}, ViewPoint \to \{-6.3, 2.4, 4\}];$$

En la representación de objetos en el espacio hay varias opciones. Por ejemplo podemos poner la secuencia de órdenes

$$rcoord := \{Random[\,], Random[\,], Random[\,]\};$$

$$pts = Table[Point[rccord], \{20\}];$$
$$Show[Graphics3D[\{PointSize[0.02], pts\}]]$$

que realiza lo siguiente: en la primera línea se define una lista de tres componentes aleatorias con la función *Random*. (Puede buscarse en el *help*). En la segunda línea se crea una tabla de 20 puntos con variables aleatorias. Y en la tercera se dibuja con la instrucción $Show[Graphics[\ldots]$ esta tabla de puntos y con un grosor de punto dado por el $PointSize$.

A continuación, vamos a utilizar $Mathematica$ para hacer un estudio de las funciones de varias variables; límites, derivadas parciales, máximos y mínimos(extremos), etc.

Definimos la función

$$f[x\_, y\_] = 2 * x\hat{\ }2/(x\hat{\ }2 + y\hat{\ }2)$$

Se observa que la función no está definida en $(x, y) = (0, 0)$. Para ver si existe el límite en dos variables $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$, calculamos primero los *límites iterados* que consisten en hacer tender primero una variable hacia el punto del límite y luego la otra. Es decir, $\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y))$, y $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y))$. En el primero, se hace tender y hacia b, y a continuación x hacia a. En el segundo es al revés. En $Mathematica$ para la función definida y para el punto $(0, 0)$ se ponen como

$$Limit[Limit[f[x, y], x \to 0], y \to 0],\ Limit[Limit[f[x, y], y \to 0], x \to 0].$$

Si los límites iterados salen distintos ya podemos afirmar que el límite en dos variables no existe; y si salen iguales, el límite en dos variables puede existir o no existir. En nuestro caso los valores obtenidos son 0 y 2, y por consiguiente no existe el límite. Si se hace

$$Plot3D[f[x, y], \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, PlotPoints \to 40, Mesh \to True]$$

se ve en el dibujo que en el origen la superficie presenta una rotura debida a la discontinuidad por no existir límite.

Tomemos ahora otra función $f(x, y) = x*y^2/(x^2+y^4)$, hacemos lo primero el dibujo en $[-2, 2] \times [-2, 2]$ y observamos que parece haber otra discontinuidad. Pero si calculamos los límites iterados, salen los dos iguales a 0. Entonces, el límite en dos variables puede existir o no. En realidad, el límite no existe ya que si nos acercamos al origen por la parábola $x = y^2$ con y tendiendo a 0, la función es constante e igual a 1/2, y por tanto el límite por esta trayectoria parabólica también es 1/2 y debería haber sido 0, coincidiendo con el valor de los límites iterados. En efecto evaluamos en *Mathematica* con las órdenes

$$y = 0.01;\ x = y\hat{}2;\ f[x, y]$$

y resulta 0.5. También se podría haber calculado el límite en una variable a través de la parábola con

$$y = .\ ;\ x = y\hat{}2;\ Limit[f[x, y], y \to 0]$$

y el límite anterior de una variable, y, vale 1/2. Conviene desasignar el valor de y con $y = ..$

Sin embargo, a veces no es fácil encontrar una trayectoria como la parábola anterior. En un caso general, para ver si existe el límite lo más cómodo es evaluar la función en un entorno del punto. Evaluamos la función en puntos de una circunferencia de radio *eps* pequeño y para distintos argumentos igualmente distribuidos en el intervalo $[0, 2\pi]$. Como interesa tomar muchos puntos sobre la circunferencia y además cambiar *eps* por diferentes valores cada vez más pequeños, hay que realizar muchos cálculos. Éstos pueden organizarse y simplificarse utilizando la instrucción *Do* como se muestra a continuación:

$$eps = 0.1;\ np = 12;$$

$$Do[Print['' \ j = \ '', j, '' \ f'', j, '' \ = \ '',$$

$$f[eps * Cos[2 * Pi * j/np], eps * Sin[2 * Pi * j/np]\ ]],$$

$$\{j, 0, np - 1, 1\}];$$

Notar los espacios en blanco dentro de las comillas para mayor claridad del resultado. El *Do* es un bucle que realiza un *Print* para los valores de j desde 0 hasta $np - 1 = 11$. Los 12 puntos de los argumentos de f están sobre la circunferencia de radio *eps*. Como los límites iterados han salido 0, si existiese el límite también tendría que ser 0. Es decir, f tendría que acercarse a 0 cuando se evalúa sobre los puntos de esta circunferencia. Pero si observamos los resultados, por ejemplo $f4$ no está próximo a 0. A continuación refinamos el número de puntos sobre la circunferencia cambiando $np = 120$ en la primera línea y si observamos lo que pasa para $j = 27, 28, 29$ o $j = 91, 92$ y 93 vemos que los valores de f no se acercan a 0 sino a 1/2 y ello es debido a que estos puntos están cerca de la elipse $x = y^2$ donde f vale 1/2. Si disminuimos eps para hacer menor el radio y acercar la circunferencia se sigue observando el mismo fenómeno. En otros ejemplos, cuando esto ocurra, significa que no existe límite. Y para ello no es necesario conocer una trayectoria concreta sino simplemente evaluar la función con las instrucciones anteriores.

Vamos a calcular *derivadas parciales*. Para una función $z = f(x, y)$ de dos variables, existen dos derivadas parciales, $\partial f/\partial x = f_x$ y $\partial f/\partial y = f_y$. En la parcial de f respecto a x, f_x se deriva $f(x, y)$ respecto a x como si y fuese un parámetro constante. Y en la parcial de f respecto a y se deriva respecto a y tomando x como constante. Las derivadas parciales son a su vez funciones de dos variables y se pueden poner en $Mathematica$ como

$$fx[x_-, y_-] = D[f[x, y], x], \quad \text{y} \quad fy[x_-, y_-] = D[f[x, y], y]$$

Conviene poner delante $Simplify[...]$ para simplificar el resultado. Probamos con la función $f(x, y) = (3xy^2)/(x^2 + y^2)$ y se obtiene $f_x = (-3x^2y^2 + 3y^4)/(x^2 + y^2)^2$ y $f_y = 6x^3y/(x^2 + y^2)^2$.

El incremento de una función $f(x, y)$ se define como $f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$ y se propone calcularlo para la función anterior.

Veamos la utilidad de la opción $PlotPoints$. Tomamos como ejemplo la función $f(x, y) = \text{sen}(x + \text{sen}(y))$. Si la representamos con la orden

$$Plot3D[f[x, y], \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}]$$

parece que hay algunos puntos extremos (máximos o mínimos) y además el dibujo es de calidad aceptable. Pero si ampliamos el rectángulo a $[-8, 8] \times [-12, 12]$ debido a la gran cantidad de extremos el dibujo es deficiente, parece una superficie poliédrica. Entonces, aumentamos el número de puntos con $PlotPoints- > 80$ y el resultado es un gráfico mucho más preciso. Sin embargo, a $Mathematica$ le cuesta más tiempo hacer los cálculos y el dibujo ocupa más memoria.

Vamos a estudiar los máximos y mínimos (extremos) de una función. Se sabe por teoría que en un punto extremo, las derivadas parciales f_x y f_y, si existen, deben ser nulas. Estas condiciones son necesarias para tener extremo, pero no son suficientes. Es decir, localizados los puntos en que se anulan las derivadas parciales, hay que comprobar uno a uno si se trata de máximo, mínimo o si no es extremo. Además, hay otros puntos que son extremos pero en los que f no tiene derivadas parciales y habrá que obtenerlos de otra manera. Más adelante vamos a poner ejemplos de cada caso.

Calculemos, por ejemplo, los extremos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 4y^2 - (28/3)x$. Comenzamos haciendo un $Plot3D$ en un rectángulo suficientemente amplio $[-6,6] \times [-6,6]$ con $PlotPoints- > 30$. A simple vista, parece que la superficie presenta alguna oscilación (observar los bordes), pero no se puede decir nada sobre los extremos. Lo que ocurre,viendo los números del eje z, es que la superficie toma valores que varían mucho y esto aplasta el resto de la gráfica, conviene quitar los puntos donde f toma valores tan grandes o pequeños y limitarse a rectángulos como, por ejemplo, $[-3,6] \times [-3,6]$.

Pero la mejor manera, es calcular las parciales fx y fy y resolver el sistema (en general, no lineal) de anular estas parciales. La orden podría ser

$$Solve[\{fx[x,y] == 0, fy[x,y] == 0\}, \{x,y\}]$$

El resultado son los puntos $(-2/3,0), (-2/3,8/3)$, $(14/3,0)$ y $(14/3,8/3)$. Estos puntos son los posibles extremos, y todos ellos están en el rectángulo inicial $[-6,6] \times [-6,6]$.

Conocidos estos puntos, se representa la superficie en rectángulos encajados, cada vez más próximos al punto. Suele ser suficiente hacer el dibujo en un cuadrado pequeño cercano al punto.

Así, por ejemplo,

$eps = 0.5;$

$Plot3D[f[x,y], \{x, -2/3 + eps, 2/3 + eps\}, \{y, 0 + eps, 0 + eps\}];$

$f[-2/3,0]$

da la representación en un entorno del punto $(-2/3,0)$ que es un cuadrado de lado uno y el valor de f en ese punto. Se ve claro que se trata de un máximo local de f y que el valor máximo es 88/27.

Si se realizan cálculos parecidos con los otros puntos se tiene que en $(-2/3,8/3)$ la función vale -56/9, pero no hay ni máximo ni mínimo, sino que es un *punto puerto*, también llamado *punto silla de montar*, es un punto tal que en alguna dirección es mínimo, y en otra es máximo, pero globalmente no es extremo. Lo mismo ocurre con el punto (14/3,0) que es un punto silla en el que f vale -1960/27. Y por último, el punto $(14/3,8/3)$ es un mínimo donde f vale -2216/27.

Veamos algunas dificultades adicionales que pueden presentarse. Consideremos la función $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, que en $Mathematica$ se puede poner como

$f[x\_, y\_] = (x * y)\hat{}(1/3)$. Es claro que está función tiene por dominio todo el plano XY. Sin embargo, si hacemos un *Plot*3*D* en $[-5,5]\times[-5,5]$ dibuja parte de la superficie, la correspondiente al primer cuadrante $x > 0, y > 0$, y la del tercer cuadrante $y < 0, y < 0$ y además avisa de que hay algún problema. Para entender lo que ocurre cuando $x.y$ es negativo evaluamos $(-1)\hat{}(1/3)$ y el *out* es lo mismo. Ponemos $(-1)\hat{}(1/3)//N$ y nos damos cuenta que toma 0.5+0.866I, una raíz cúbica (la primera) de -1, pero que es un número complejo. Como queremos la determinación real de $(-1)^{(1/3)}$, esto puede arreglarse definiendo la función con la siguiente orden

$$f[x\_, y\_] = If[(x * y) >= 0, (x * y)\hat{}(1/3), -(Abs[x * y])\hat{}(1/3)]$$

En efecto, si hacemos un *Plot*3*D* ahora se dibuja toda la superficie. Y se observa que no hay extremos; en el punto (0,0) tampoco hay extremo pues en puntos próximos al origen en que $x.y > 0$, f es positiva y si $x.y < 0$, f es negativa. Tampoco existen las derivadas parciales en el origen pues si se calculan, resultan $f_x = y/(3(xy)^{(2/3)})$ y $f_y = x/(3(xy)^{(2/3)})$ que no están definidas en $(0,0)$.

Otra función con la que se pueden tener problemas es $f(x,y) = 3 - (xy)^{(2/3)}$. En *Mathematica* conviene definirla como $f[x\_, y\_] = 3 - ((x * y)\hat{}2)\hat{}(1/3)$. Representarla en cuadrado $[-5,5]\times[-5,5]$. Observa su forma de tejado y comprueba que en los puntos con $x = 0$ o $y = 0$ hay máximos no estrictos.

Cuando se representa la función $\mathrm{sen}(x^2+y^2)/(x^2+y^2)$ con $PlotPoints- >$ 30 en $[-5,5]\times[-5,5]$, se tiene poca definición y la función parece truncada en el origen. Esto es porque *Mathematica* elige el rango de valores de f para dar los máximos detalles de la función. Repetimos el gráfico con $PlotPoints- > 100$ para aumentar la resolución y como los valores de la función están entre [0,1], para verla entera ponemos, como con el *Plot* de una variable $PlotRange- > \{0,1\}$. Esta función no está definida en (0,0), no existe $f[0,0]$, (compruébalo), pero existe el límite en (0,0) y vale 1, (compruébalo tomando puntos en una circunferencia cercana al origen, como se hizo antes).

Consideramos la función $f(x,y) = 12 - (x^2+y^2)^{(1/3)}$. Si calculamos las derivadas parciales f_x y f_y, obtenemos $-2x/(x^2+y^2)^{(2/3)}$ y $-2y/(x^2+y^2)^{(2/3)}$ que no están definidas en (0,0). En efecto, si intentamos resolver el sistema que anula las derivadas parciales con

$$Solve[\{fx[x,y] == 0, fy[x,y] == 0\}, \{x,y\}]$$

no obtenemos solución. Pero si representamos la función en un rectángulo que contenga el origen observamos que hay un máximo. La superficie es en realidad un cono que tiene su vértice en el origen. Este es un ejemplo de función que tiene un extremo pero que no tiene derivadas parciales en el punto extremo.