

ALGUNAS CUESTIONES SOBRE MATRICES

Advertencia. Puesto que lo que nos interesa en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales está relacionado con las matrices cuadradas exclusivamente, voy a exponer una serie de ideas únicamente en el caso de las matrices cuadradas. Creo que es bastante obvio que lo que cuento sobre producto de una matriz por un vector y producto de dos matrices es extrapolable al caso general sin ninguna dificultad. Cuidado en cambio con la idea de que la independencia lineal de n vectores de \mathbb{R}^n implica que forme una base de \mathbb{R}^n . Esto ocurre porque hay tantos vectores como componentes.

1. El producto matriz por vector

El producto de una matriz por un vector realiza de forma compacta una combinación lineal de las columnas de la matriz. Así, por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

También, con coeficientes más generales,

$$C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{array} \right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

(he puesto las líneas verticales en la matriz para que se observen claramente las columnas, no porque se escriban así las matrices).

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es lo mismo que realizar la descomposición del término independiente como combinación lineal de las columnas de la matriz. Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

es lo mismo que encontrar x, y, z de forma que

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Cuando n vectores de \mathbb{R}^n son linealmente independientes, lo que estamos diciendo es que

$$C_1 \mathbf{p}_1 + \dots + C_n \mathbf{p}_n = \mathbf{0} \quad \implies \quad C_1 = \dots = C_n = 0.$$

Escribiendo los vectores como las columnas de una matriz

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \end{array} \right]$$

la independencia lineal equivale a que

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

o bien

$$P\mathbf{u} = \mathbf{0} \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Por ser n vectores de \mathbb{R}^n (esto es muy importante), esto implica que, cualquiera que sea \mathbf{u}_0 , el sistema

$$P\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$$

tiene solución única, es decir, podemos escribir de forma única

$$C_1\mathbf{p}_1 + \dots + C_n\mathbf{p}_n = \mathbf{u}_0.$$

Esto es lo mismo que decir que $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n .

2. El producto de matrices

Sean A y B dos matrices $n \times n$. Podemos pensar en B como una lista de sus columnas

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \end{array} \right].$$

Así

$$AB = A \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} A\mathbf{b}_1 & \dots & A\mathbf{b}_n \end{array} \right].$$

El producto AB se puede entender como la matriz cuyas columnas son $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_n$, es decir, la colección de los productos de A por las columnas de B . A su vez, cada uno de estos productos es una combinación lineal de las columnas de A .

Esto puede resultar algo confuso a primera vista, pero es muy simple. Si escribo

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 21 & 8 \end{bmatrix}$$

estoy escribiendo a la vez

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Fijándonos ahora en las columnas de la matriz de la izquierda, tenemos que

$$3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

3. Leyendo $P^{-1}AP$

Supongamos que A, P y B son matrices cuadradas que cumplen la siguiente relación

$$P^{-1}AP = B.$$

Pensaremos en P organizada por columnas

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \end{array} \right].$$

Simplemente por escribir P^{-1} en la relación anterior, estamos presuponiendo que los vectores $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$ son linealmente independientes.

Multiplicando ahora a la izquierda de $P^{-1}AP = B$ por la matriz P , obtenemos

$$PP^{-1}AP = PB,$$

es decir,

$$AP = PB.$$

Esto quiere decir que

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A\mathbf{p}_1 & \dots & A\mathbf{p}_n \end{array} \right] = P \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} P\mathbf{b}_1 & \dots & P\mathbf{b}_n \end{array} \right].$$

Por tanto

$$A\mathbf{p}_1 = P\mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \end{array} \right] \mathbf{b}_1,$$

es decir, \mathbf{b}_1 es el vector que contiene los coeficientes de la descomposición de $A\mathbf{p}_1$ en la base $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$. Igualmente

$$A\mathbf{p}_2 = P\mathbf{b}_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \end{array} \right] \mathbf{b}_2,$$

etc.

Vamos con un ejemplo con vectores de tres componentes. La expresión

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{array} \right]$$

es la misma que

$$AP = P \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

unida al hecho de que las columnas de P sean linealmente independientes, hecho que está implícito en la expresión $P^{-1}AP = B$, pero no en $AP = PB$. Esto es lo mismo que

$$\begin{aligned} A\mathbf{p}_1 &= P \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 \\ A\mathbf{p}_2 &= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3, \\ A\mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_1. \end{aligned}$$

Ejercicio. También con matrices 3×3 y escribiendo

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{array} \right]$$

escribe el valor de

$$A\mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2, \quad A\mathbf{p}_3$$

sabiendo que $P^{-1}AP = B$, donde B cada una de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio. Si $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 y sabemos que

$$\begin{aligned} A\mathbf{p}_1 &= 3\mathbf{p}_1, \\ A\mathbf{p}_2 &= 3\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 \\ A\mathbf{p}_3 &= 3\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2 \end{aligned}$$

¿cuánto vale $P^{-1}AP$? (como de costumbre P es la matriz cuyas columnas son $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ y \mathbf{p}_3).

Ejercicio. Si

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix},$$

¿cuánto vale el producto de A por cada una de las columnas de P ? (cuando en una matriz no se escriben números en algunas posiciones se sobreentiende que son ceros; no es una notación demasiado correcta, pero es muy cómoda).

4. Valores y vectores propios

Tomemos de nuevo una matriz cuadrada A . Si un vector $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ cumple que

$$A \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}$$

(con $\lambda \in \mathbb{R}$), se dice que \mathbf{p} es un **vector propio** de A , asociado al **valor propio** λ . Nota que pedir que $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ es necesario para tener algo que observar: el vector nulo cumple la igualdad anterior con cualquier λ .

Ya de paso, hay que notar que el valor propio $\lambda = 0$ (si es que es valor propio de A) es algo más ‘invisible’ que los demás, en el sentido de que, $\lambda = 0$ es valor propio cuando existe $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ de forma que

$$A \mathbf{p} = \mathbf{0} = 0 \mathbf{p}.$$

Vamos a repasar una serie de propiedades muy elementales de este concepto:

- Si \mathbf{p} es un vector propio de A , todos sus proporcionales también lo son (y asociados al mismo valor propio), ya que

$$A \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p} \quad \implies \quad A(\alpha \mathbf{p}) = \lambda(\alpha \mathbf{p}), \quad \forall \alpha.$$

- Si \mathbf{p} y \mathbf{q} son vectores propios de A asociados al mismo valor propio, todas sus combinaciones lineales también lo son:

$$A(\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}) = \lambda(\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}).$$

- Si \mathbf{p} y \mathbf{q} son vectores propios asociados a distintos valores propios, obligatoriamente son linealmente independientes.
- Si λ es valor propio de A es porque existe un vector $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ de forma que

$$(A - \lambda I) \mathbf{p} = A \mathbf{p} - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

(I es la matriz identidad). Por tanto, necesariamente (¿por qué?)

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

La expresión

$$\det(A - \lambda I),$$

vista como función de la variable λ es un polinomio de grado n en esta variable. Este polinomio recibe el nombre de **polinomio característico** de A . Acabamos de ver que todos los valores propios son raíces de este polinomio, lo cual limita enormemente la cantidad de posibles valores propios de una matriz.

- Además ocurre el recíproco. Si λ cumple que

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

obligatoriamente existe $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ de forma que

$$(A - \lambda I)\mathbf{p} = \mathbf{0},$$

lo que es lo mismo que

$$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}.$$

Es decir, todas las raíces del polinomio característico son valores propios.

Ejercicio. ¿Cuál es el máximo número de valores propios que puede tener una matriz 3×3 ?

Ejercicio. Demuestra que las raíces del polinomio característico de la matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

son los números complejos

$$\alpha \pm i\beta,$$

luego esa matriz no tiene valores propios (reales).

Antes de observar qué ocurre cuando hay raíces complejas del polinomio característico, notemos que un vector complejo \mathbf{p} se puede poner siempre como

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{re}} + i\mathbf{p}_{\text{im}},$$

donde \mathbf{p}_{re} y \mathbf{p}_{im} son vectores reales. Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 - 2i \\ 3 + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde se ve claramente que \mathbf{p}_{re} es el vector de las partes reales de \mathbf{p} y que \mathbf{p}_{im} es el de las partes imaginarias.

Supongamos que $\lambda = \alpha \pm i\beta$ son raíces del polinomio característico de la matriz A . Entonces, tiene que existir un vector complejo $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{re}} + i\mathbf{p}_{\text{im}}$ de forma que

$$A(\mathbf{p}_{\text{re}} + i\mathbf{p}_{\text{im}}) = (\alpha + i\beta)(\mathbf{p}_{\text{re}} + i\mathbf{p}_{\text{im}}).$$

Se dice que el vector \mathbf{p} es un **vector propio complejo** asociado al **valor propio complejo** $\alpha + i\beta$ de A . Es muy fácil notar que entonces

$$A(\mathbf{p}_{\text{re}} - i\mathbf{p}_{\text{im}}) = (\alpha - i\beta)(\mathbf{p}_{\text{re}} - i\mathbf{p}_{\text{im}}),$$

luego el vector $\bar{\mathbf{p}}$ (obtenido conjugando los elementos de \mathbf{p} , esto es, cambiando el signo a las partes imaginarias), también es vector propio de A , pero asociado al valor propio conjugado $\alpha - i\beta$.

Vamos a separar partes reales e imaginarias en la expresión:

$$A(\mathbf{p}_{\text{re}} + \imath \mathbf{p}_{\text{im}}) = (\alpha + \imath \beta)(\mathbf{p}_{\text{re}} + \imath \mathbf{p}_{\text{im}}).$$

Tenemos que

$$A \mathbf{p}_{\text{re}} + \imath A \mathbf{p}_{\text{im}} = (\alpha \mathbf{p}_{\text{re}} - \beta \mathbf{p}_{\text{im}}) + \imath (\beta \mathbf{p}_{\text{re}} + \alpha \mathbf{p}_{\text{im}}).$$

Comparando partes reales e imaginarias, se tiene que

$$\begin{aligned} A \mathbf{p}_{\text{re}} &= \alpha \mathbf{p}_{\text{re}} - \beta \mathbf{p}_{\text{im}} \\ A \mathbf{p}_{\text{im}} &= \beta \mathbf{p}_{\text{re}} + \alpha \mathbf{p}_{\text{im}}. \end{aligned}$$

Ejercicio. Escribe qué expresiones se obtienen de comparar las partes reales e imaginarias de la siguiente expresión:

$$A(\mathbf{p}_{\text{re}} - \imath \mathbf{p}_{\text{im}}) = (\alpha - \imath \beta)(\mathbf{p}_{\text{re}} - \imath \mathbf{p}_{\text{im}}).$$

Ejercicio. Supongamos que A es una matriz 3×3 y que hay tres vectores independientes $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ tales que

$$\begin{aligned} A \mathbf{p}_1 &= 2 \mathbf{p}_1 - 3 \mathbf{p}_2 \\ A \mathbf{p}_2 &= 3 \mathbf{p}_1 + 2 \mathbf{p}_2, \\ A \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

Llamamos, como de costumbre, P a la matriz que tiene a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ y \mathbf{p}_3 como columnas. ¿Cuánto vale $P^{-1} A P$? Calcula

$$A(\mathbf{p}_1 + \imath \mathbf{p}_2), \quad A(\mathbf{p}_1 - \imath \mathbf{p}_2).$$

¿Qué son, por tanto, los valores $2 \pm 3 \imath$?

5. Matrices diagonalizables

Un caso particularmente favorable (pero que no siempre ocurre) es cuando una matriz A de tamaño $n \times n$ tiene n vectores propios linealmente independientes, es decir, existen $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$, linealmente independientes, de forma que

$$\begin{aligned} A \mathbf{p}_1 &= \lambda_1 \mathbf{p}_1, \\ &\vdots \\ A \mathbf{p}_n &= \lambda_n \mathbf{p}_n. \end{aligned}$$

Los números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A . Fíjate que no hay ninguna razón para que alguno no esté repetido. Incluso podrían ser todos iguales.

En esta situación, tenemos una base de \mathbb{R}^n formada íntegramente por vectores propios de A . Poniendo de nuevo

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \end{array} \right]$$

las expresiones anteriores se agrupan en la forma

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = D.$$

Cuando hemos podido encontrar estos vectores de forma que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal, se dice que A es **diagonalizable**. Es lo mismo que exista una matriz diagonal D y una matriz inversible P de forma que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = D,$$

que la posibilidad de encontrar vectores independientes $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ (las columnas de P) de forma que

$$\begin{aligned} A\mathbf{p}_1 &= \lambda_1\mathbf{p}_1, \\ &\vdots \\ A\mathbf{p}_n &= \lambda_n\mathbf{p}_n. \end{aligned}$$

Los elementos de la matriz diagonal D en la igualdad $P^{-1}AP = D$ son los valores propios de A . Las columnas de P son los vectores propios de A .