Capítulo 4

Aplicaciones lineales y diagonalización de endomorfismos

4.1 Introducción

Definición 4.1.1 Sean V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación

$$\begin{aligned} f: \ & V \to W \\ & v \mapsto f(v) \end{aligned}$$

se llama *aplicación lineal* u *homomorfismo* si verifica:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
2. $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

Si además f es inyectiva, se llama *monomorfismo*, si es suprayectiva *epimorfismo*, si es biyectiva *isomorfismo*, si $W = V$ f se llama *endomorfismo* y un endomorfismo biyectivo se llama *automorfismo*.

Ejemplo 4.1.2 Sea

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x+y, -y, x-y)\,. \end{array}$$

Veamos que f es una aplicación lineal:

1. $f\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$

$$= \quad (2(x_1+x_2) + (y_1+y_2), -(y_1+y_2), (x_1+x_2) - (y_1+y_2)) =$$

$$= \quad (2x_1 + y_1, -y_1, x_1 - y_1) + (2x_2 + y_2, -y_2, x_2 - y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2)\,.$$

2. $$f\left(\alpha(x,y)\right) = f(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x + \alpha y, -\alpha y, \alpha x - \alpha y)$$
$$= \alpha(2x + y, -y, x - y) = \alpha f(x,y)\,.$$

Proposición 4.1.3 *Sea $f : V \to W$ lineal, entonces*

1. *$f(0) = 0$.*
2. *Si $\{v_1, \dots v_r\}$ es un sistema ligado, entonces $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ es un sistema ligado.*

Demostración.

1. $f(v) = f(v + 0) = f(v) + f(0)$, y sumando -$f(v)$ en los dos miembros de la igualdad, se deduce que $f(0) = 0$.
2. Si $\{v_1, \dots v_r\}$ es un sistema ligado, entonces existen $\alpha_1, \dots \alpha_r \in \mathbb{R}$ffl no todos nulos tales que $\alpha_1 v_1 +, \dots \alpha_r v_r = 0$. Tenemos, por tanto,
$$0 = f(0) = f(\alpha_1 v_1 +, \dots \alpha_r v_r) = \alpha_1 f(v_1) +, \dots \alpha_r f(v_r)\,,$$
luego $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ es un sistema ligado.

Nota 4.1.4 En contra de lo que ocurre con los sistemas ligados, en general, un sistema libre de V no tiene por qué transformarse en un sistema libre de W. En efecto, para la aplicación lineal

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array}$$

se tiene que $f(1,2,3) = (1,2) = f(1,2,4)$. El sistema $\{(1,2,3),(1,2,4)\}$ es libre en $\mathbb{R}^3$ pero el sistema $\{(1,2),(1,2)\}$ es ligado en $\mathbb{R}^2$.

Definición 4.1.5 Sea $f : V \to W$ lineal, el conjunto:

$$\{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

se llama o núcleo de f y se denota $\mathrm{Ker} f$.

Proposición 4.1.6 *Sea $f : V \to W$ lineal, entonces son equivalentes:*

1. *f es inyectiva.*

2. *f transforma sistemas libres en sistemas libres.*

3. *$Kerf = \{0\}$.*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2)$ Sea $\{v_1, \dots v_r\}$ un sistema libre, veamos que $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ es un sistema libre. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tales que

$$\alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_r f(v_r) = 0\,.$$

Si algún α_i fuera no nulo, tendríamos que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \neq 0$$

ya que $\{v_1, \dots v_r\}$ es un sistema libre. Pero $f(v) = 0$ lo que contradice el que f sea inyectiva.

$2 \Rightarrow 3)$ Si $v \neq 0 \in \mathrm{Ker} f$ tendríamos que el sistema libre $\{v\}$ se transforma en el sistema $\{f(v)\} = \{0\}$ ligado, pero esto es imposible y por lo tanto:

$$\mathrm{Ker} f = \{0\}\,.$$

$3 \Rightarrow 1)$ Sean v_1, v_2 tales que $f(v_1) = f(v_2)$. Veamos que $v_1 = v_2$.

$$0 = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2) \Rightarrow v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

y así, f es inyectiva.

Proposición 4.1.7 *Sea $f : V \to W$ lineal y $S \leq V$ entonces $f(S) \leq W$.*

Demostración.

1. Sean $w_1, w_2 \in f(S)$, veamos que $w_1 + w_2 \in f(S)$.

   En efecto, $w_1 = f(v_1)\,, v_1 \in S, \quad w_2 = f(v_2)\,, v_2 \in S$. Tenemos que $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$ y como $v_1 + v_2 \in S$ tenemos que $w_1 + w_2 \in f(S)$.

2. Ejercicio.

Nota 4.1.8 El conjunto $f(V) = \mathrm{Im} f$ es un subespacio vectorial de W. Llamaremos *rango de f* a la dimensión de este subespacio.

Teorema 4.1.9 *Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, entonces*

$$\dim V = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f$$

Demostración. La omitimos.

4.2 Expresión coordenada de una aplicación lineal

Sea $f : V \to W$ lineal y sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_s\}$ una base de W. Dado que $f(v_1), \ldots, f(v_r)$ son elementos de W tenemos:

$$\begin{array}{rcl} f(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{12}w2 + \cdots + a_{1s}w_s \\ f(v_2) & = & a_{21}w_1 + a_{22}w2 + \cdots + a_{2s}w_s \\ \vdots & & \\ f(v_r) & = & a_{r1}w_1 + a_{r2}w2 + \cdots + a_{rs}w_s\,. \end{array}$$

Consideramos $v \in V$, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$. Como $f(v) \in W$, $f(v) = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_s w_s$. Vamos a estudiar la relación que hay entre las coordenadas de v respecto de B_1 y las coordenadas de $f(v)$ respecto de B_2.

$$\begin{array}{rcl} f(v) & = & \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_r f(v_r) \\ & = & \alpha_1(a_{11}w_1 + a_{12}w2 + \cdots + a_{1s}w_s) + \\ & & \alpha_2(a_{21}w_1 + a_{22}w2 + \cdots + a_{2s}w_s) + \\ & & \ldots \\ & & \alpha_r(a_{r1}w_1 + a_{r2}w2 + \cdots + a_{rs}w_s) \\ & = & (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_r a_{r1})w_1 + \\ & & (\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_r a_{r2})w_2 + \\ & & \ldots \\ & & (\alpha_1 a_{1s} + \alpha_2 a_{2s} + \cdots + \alpha_r a_{rs})w_s \end{array}$$

y como las coordenadas de un vector respecto de una base dada son únicas, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \beta_1 & = & \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_r a_{r1} \\ \beta_2 & = & \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_r a_{r2} \\ \vdots & & \\ \beta_s & = & \alpha_1 a_{1s} + \alpha_2 a_{2s} + \cdots + \alpha_r a_{rs} \end{array}$$

Estas igualdades se pueden expresar matricialmente como sigue:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1s} & a_{2s} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$$

o abreviadamente:

$$\beta = A \cdot \alpha$$

donde α son las coordenadas de v respecto de la base B_1 de V, β son las coordenadas de $f(v)$ respecto de la base B_2 de W y $A \in \mathcal{M}_{s\times r}$ es la matriz cuya columna i-ésima está formada por las coordenadas de la imagen del i-ésimo vector de B_1 respecto de B_2. La matriz A se llama *matriz coordenada de f respecto de las bases B_1 y B_2*.

Ejemplo 4.2.1 Consideramos la siguiente aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x-y, 2x+5y, y) \end{array}$$

y las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

$$B_1 = \{(1,0),(0,1)\}\,, \quad B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\,.$$

Para construir A, la matriz coordenada de f respecto de las bases B_1 y B_2, tenemos que calcular $f(1,0)$ y $f(0,1)$ y después las coordenadas de cada uno de estos dos vectores de $\mathbb{R}^3$ respecto de B_2. Notemos que por ser B_2 la base canónica de $\mathbb{R}^3$ este segundo paso es inmediato y tenemos

$$f(1,0) = (2,2,0)\,, f(0,1) = (-1,5,1)\,.$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

4.2.1 Cambio de coordenadas en una aplicación lineal

Consideramos $f : V \to W$ lineal, sean r la dimensión de V y s la dimensión de W. Sean B_1 una base de V y B_2 una base de W. Sea A la matriz coordenada de f respecto de las bases B_1 y B_2. Sea $v \in V$ y sean α las coordenadas de v respecto de B_1 y β las de $f(v)$ respecto de B_2. Acabamos de ver que se verifica la relación

$$\beta = A \cdot \alpha\,. \tag{4.1}$$

Consideramos ahora una nueva base de V que denotaremos B_3 y una nueva base de W que denotaremos B_4. Sea B la matriz coordenada de f respecto de las bases B_3 y B_4. Para el $v \in V$ anterior, sean $\bar{\alpha}$ las coordenadas de v respecto de B_3 y $\bar{\beta}$ las de $f(v)$ respecto de B_4. Análogamente a (4.1), en este caso tenemos

$$\bar{\beta} = B \cdot \bar{\alpha}\,. \tag{4.2}$$

Nos planteamos en esta sección estudiar la relación que hay entre las matrices A y B de (4.1) y (4.2). A y B están relacionadas ya que son matrices coordenadas de la misma aplicación lineal f respecto de bases distintas. El objetivo es expresar adecuadamente esta relación. Sean $P \in \mathcal{M}_{r\times r}$ y $Q \in \mathcal{M}_{s\times s}$ las matrices de cambio de base en V y en W respectivamente tales que

$$\alpha = P\bar{\alpha} \qquad \text{y} \qquad \beta = Q\bar{\beta}.$$

Partiendo de cualquiera de estas dos igualdades, por ejemplo la segunda, y utilizando la otra, además de (4.1), obtenemos

$$\bar{\beta} = Q^{-1}\beta = Q^{-1}A\alpha = Q^{-1}AP\bar{\alpha}\,. \tag{4.3}$$

Pero la matriz coordenada de f respecto de una base en V y otra en W es única, por tanto, de (4.2) y (4.3) obtenemos

$$B = Q^{-1}AP\,.$$

Definición 4.2.2 Sean A, B tales que $\exists\, P, Q$ inversibles con $B = Q^{-1}AP$, entonces se dice que las matrices A y B son *equivalentes*.

4.3 Diagonalización de endomorfismos

Sea $f : V \to V$ endomorfismo y sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V (tomamos la misma base en el espacio de salida y en el de llegada). Sea A la matriz coordenada de f respecto de B_1 (la matriz A es cuadrada). Si consideramos $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ otra base de V y B es la matriz coordenada de f respecto de B_2, según la fórmula (4.3), tenemos que

$$B = P^{-1}AP.$$

En esta sección nos vamos a ocupar de buscar una base de V respecto de la cual la matriz coordenada de f sea diagonal. Para algunos endomorfismos tal base existirá, pero para otros no.

Definición 4.3.1 Un endomorfismo $f : V \to V$ se llama *diagonalizable* si existe una base B de V tal que la matriz coordenada de f respecto de B es diagonal.

Nota 4.3.2 Sea el endomorfismo $f : V \to V$ y sea B_1 una base cualquiera de V con A la matriz coordenada. f es diagonalizable si y sólo si existe una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Observemos que esta matriz P representa un cambio de base entre B_1 y otra base de V y la matriz diagonal $P^{-1}AP$ es la matriz coordenada de f respecto de la segunda base.

Definición 4.3.3 Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Un vector $v \neq 0$ se llama *vector propio de* f si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \lambda v$. λ se llama *valor propio de* f y se dice que v es vector propio de f *asociado* al valor propio λ.

Nota 4.3.4 Observemos que la definición anterior no depende de ninguna base de V. En particular no depende de ninguna matriz coordenada de f, aunque utilizaremos las matrices coordenadas para calcular valores y vectores propios.

4.3.1 Cálculo de valores y vectores propios

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo y sea B una base de V. Sea A la matriz coordenada de f respecto de la base B. Tenemos que $f(v) = Av$. Si v es un vector propio, entonces $Av = \lambda v$, y por tanto $(A - \lambda I)v = 0$. Pero $v \neq 0$ por ser vector propio; en consecuencia el sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$ es compatible indeterminado. Por lo tanto

$$|A - \lambda I| = 0\,, \tag{4.4}$$

y así, los valores propios son las raíces de la ecuación polinómica $\mid A - \lambda I \mid= 0$. Notemos que el grado del polinomio $\mid A - \lambda I \mid$ es $n =$dim V. Una vez hallados los valores propios, se calculan los vectores propios asociados resolviendo el sistema lineal $(A - \lambda I)v = 0$.

Ejemplo 4.3.5 Consideramos el endomorfismo

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x - 2y - 2z, x + 4y + 2z, -x - y + z) \end{array}$$

Tomamos B la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y construimos A, la matriz coordenada de f respecto de la base B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para obtener los valores propios, utilizamos la ecuación (4.4)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3+\lambda)(-2+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 1 \\ \text{ó} \\ \lambda = 3 \\ \text{ó} \\ \lambda = 2 \end{array} \right.$$

Por tanto, los valores propios del endomorfismo f son $1, 2$ y 3. Buscamos ahora los vectores propios asociados a estos valores propios. Comenzamos con el vector propio asociado al valor propio 1. Para ello, hemos de resolver el sistema lineal $(A - 1 \cdot I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema es compatible indeterminado (ya lo sabíamos) y su solución es:

$$S(1) = \{(x, -x, x) \mid \ x \in \mathbb{R}\text{ffl}\}\,.$$

Obsérvese que la solución de este sistema lineal es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión uno. Una base del subespacio podría ser $\{(1, -1, 1)\}$, por tanto podemos escribir $S(1) = \langle (1, -1, 1) \rangle$.

Procediendo análogamente, obtenemos

$$S(2) = \langle (0, -1, 1) \rangle \qquad \text{y} \qquad S(3) = \langle (-1, -1, 0) \rangle\,.$$

Proposición.- Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Sean B_1 y B_2 dos bases de V. Sean A y B las matrices coordenadas de f respecto de las bases B_1 y B_2 respectivamente. Entonces:

$$|A - \lambda I| = |B - \lambda I|\,.$$

De la proposición anterior se deduce la posibilidad de obtener los valores propios de un endomorfismo con independencia de la base a la que está referida la matriz. Dada una base cualquiera y, asociada a ella, una matriz M, los valores propios se obtienen resolviendo la ecuación $|M - \lambda I| = 0$.

Definición 4.3.6 Sea $f : V \to V$ un endomorfismo y sea λ un valor propio de f. El conjunto

$$S(\lambda) = \{\ v \in V \ \mid \ v \text{ es valor propio de } f \text{ asociado a } \lambda\ \} \cup \{\ 0\ \}$$

se llama *subespacio fundamental de f asociado a λ*.

Obsérvese que

$$S(\lambda) = \{\ v \ \in V \mid f(v) = \lambda v\ \}\,.$$

Proposición 4.3.7 *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo y sea λ un valor propio de f. Entonces*

$$S(\lambda) \leq V\,.$$

Además, la dimensión del subespacio $S(\lambda)$ es mayor o igual que uno

$$\dim S(\lambda) \geq 1\,.$$

Demostración. Ejercicio.

Proposición 4.3.8 *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Entonces f es diagonalizable si y sólo si existe una base de vectores propios.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea B_1 una base de V tal que la matriz coordenada A de f respecto de B_1 es diagonal. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1$$

luego λ_1 es un valor propio y v_1 es un vector propio asociado asociado a él. Análogamente llegamos a que $f(v_i) = \lambda_i v_i$ para $i = 1, \ldots, n$ y en consecuencia B_1 es una base de vectores propios.

$\Longrightarrow$) Sea $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de V tal que $f(w_i) = \lambda_i w_i$. Sea A la matriz coordenada de f respecto de B_2. Entonces la matriz asociada es diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

•

4.3.2 Discusión de un endomorfismo

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo y sea n=dim V. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios distintos ($r \leq n$) de f y sea m_i la multiplicidad de λ_i como valor propio de f, es decir, la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio $\mid A - \lambda I \mid$. Entonces se verifica

$$1 \leq \dim S(\lambda_i) \leq m_i \,.$$

Una condición necesaria para que f sea diagonalizable es que

$$m_1 + \cdots + m_r = n \,.$$

Además, si se verifica esta condición entonces

$$\boxed{f \text{ diagonalizable} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim\, S(\lambda_i) = m_i \,, \quad i = 1, \ldots, r}$$

Nota 4.3.9 Como caso particular, si f tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.