Cálculo Numérico

Ingeniería Industrial

Problemas

Curso 2008-2009

1 Normas matriciales

Ejercicio 1.1 .- Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar: $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ y $\|A\|_\infty$.

Ejercicio 1.2 .- Probar que en $\mathbb{R}^n$ las normas $\| \quad \|_1$, $\| \quad \|_2$ y $\| \quad \|_\infty$ son equivalentes.

Ejercicio 1.3 .- Probar que

$$\|A\|_1 = \max_j (\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|)$$

.

Ejercicio 1.4 .- Comprobar que $\|A\| = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ no es una norma matricial. Demostrar que existe un número real k fijo tal que $\|A\| = k \max_{i,j} |a_{i,j}|$ es norma matricial.

Ejercicio 1.5 .- Sea B una matriz simétrica real, con valores propios $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Demostrar que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda_1 \, x^T x \leq x^T B x \leq \lambda_n \, x^T x.$$

Ejercicio 1.6 .- Deducir del problema anterior que, si A es una matriz de orden n real, $\|Ax\|_2^2 \leq \mu^2 \, x^T x$, donde $\mu = \rho(A^T A)^{1/2}$.

Ejercicio 1.7 .- Teniendo en cuenta el problema anterior y utilizando un vector propio u de μ^2, probar que $\|A\|_2 = \rho(A^T A)^{1/2}$.

Ejercicio 1.8 .- Hallar dos matrices A y B tales que $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$.

Ejercicio 1.9 .- Sea A una matriz simétrica definida positiva. Para cada $x \neq 0$ se define el *cociente de Rayleigh*

$$R(x) = \frac{x^T A \, x}{x^T x}.$$

Demostrar que el mínimo y el máximo de esta función son los valores propios de A de menor y mayor valor absoluto, respectivamente.

Ejercicio 1.10 .- Sea A una matriz inversible. Probar:

a) A es simétrica si y sólo si A^{-1} lo es.

b) A es simétrica definida positiva si y sólo si A^{-1} lo es.

2 Sistemas lineales: métodos directos

Ejercicio 2.1 .- Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

mediante:

a) el método de Gauss sin elección de pivote

b) el método de Gauss con elección de pivote parcial

c) el método de Gauss con elección de pivote total.

Ejercicio 2.2 .- Usando aritmética de punto flotante de cuatro decimales, comparar los resultados obtenidos al resolver el sistema

$$\begin{cases} 0.0003x_1 + 1.566x_2 = 1.569 \\ 0.3454x_1 - 2.436x_2 = 1.018 \end{cases}$$

por el método de Gauss simple ó con elección de pivote total. La solución exacta del sistema es $x_1 = 10$, $x_2 = 1$.

Ejercicio 2.3 .- Usar el método de Gauss-Jordan y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Ejercicio 2.4 .- Comprobar que el método de Gauss-Jordan requiere:

$\dfrac{n^3}{2} + n^2 - \dfrac{n}{2}$ multiplicaciones /divisiones, y $\dfrac{n^3}{2} - \dfrac{n}{2}$ sumas/restas.

Ejercicio 2.5 .- Hallar la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tomando $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$ y resolver el sistema $Ax = b$, utilizando dicha factorización.

Ejercicio 2.6 .- Resolver el sistema siguiente utilizando la factorización de Cholesky, comprobando previamente que la matriz de coeficientes es simétrica definida positiva:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ -x + 2y - z + 2t = -3 \\ x - y + 5z + 2t = 16 \\ 2y + 2z + 6t = 8 \end{cases}$$

Ejercicio 2.7 .- Un fabricante utiliza cuatro ingredientes `E,F,G` y `H`, en la elaboración de un cierto producto alimenticio. Sean x, y, z, t las cantidades respectivas de `E,F,G` y `H` que componen el producto.

Una unidad de cada uno de los ingredientes proporciona vitaminas `A,B` y `C` en las cantidades en miligramos que se expresan en la siguiente tabla, así como un número de kilocalorías que también aparece reflejado en la tabla.

	E	F	G	H
vit. A	1	1	1	2
vit. B	1	2	1	3
vit. C	1	3	2	1
kilocal.	2	2	1	1

Si designamos respectivamente por u, v, r y w los miligramos de vitamina `A,B` y `C` y las kilocalorías, que tendrá el producto elaborado con los cuatro ingredientes, se pide:

a) Expresar matricialmente la relación entre las cantidades x, y, z, t y u, v, r, w.

b) Justificar si dados unos valores fijos de u, v, r, w es posible encontrar de forma única valores de x, y, z, t que proporcionen esos miligramos de vitaminas y esas kilocalorías.

c) Calcular utilizando el método de factorización LU qué cantidad de cada ingrediente es necesaria para que la composición del producto conste de

1) 300 mg. de vitamina `A`, 430 mg. de `B`, 310 mg. de `C` y 250 kilocalorías.
2) 250 mg. de vitamina `A`, 350 mg. de vitamina `B`, 350 mg. de vitamina `C` y 300 kilocalorías.

Ejercicio 2.8 .- Se pretende resolver el sistema lineal $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, y se conoce una factorización de A en la forma QU, con Q ortogonal y U triangular superior. ¿Cómo hallarías dicha solución?. ¿Qué coste computacional añade al de la factorización?

Ejercicio 2.9 .- Sea el sistema tridiagonal de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_1x_1 + c_1x_2 \quad\quad &= d_1\\ b_2x_1 + a_2x_2 + c_2x_3 &= d_2\\ \cdots \quad\quad\quad &\\ b_nx_{n-1} + a_nx_n &= d_n. \end{aligned}$$

a) Se construyen dos sucesiones finitas $(f_r)_{r=1}^n$ y $(g_r)_{r=1}^n$ del siguiente modo:

$$\begin{cases} f_1 = -c_1/a_1\\ f_r = \dfrac{-c_r}{b_rf_{r-1}+a_r}, \ r = 2, \cdots, n-1,\\ f_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g_1 = d_1/a_1\\ g_r = \dfrac{d_r - b_rg_{r-1}}{b_rf_{r-1}+a_r}, \ r = 2, \cdots, n. \end{cases}$$

Comprobar que los denominadores de ambas sucesiones son

$$\Delta_r/\Delta_{r-1}, \ r = 1, 2, \cdots, n,$$

donde $\Delta_0 = 1$ y Δ_r es el r–ésimo menor principal director de la matriz de coeficientes del sistema para $r \geq 1$.

b) Demostrar que la solución $x_1, x_2, \cdots, x_n$ del sistema verifica

$$x_r = f_rx_{r+1} + g_r, \ r = n, n-1, n-2, \cdots, 1.$$

c) Mostrar la utilidad de a) y b) para resolver el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & -x_2 & & & & = & 8\\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & = & 4\\ & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & & = & 6\\ & & -x_3 & +2x_4 & -x_5 & = & 0\\ & & & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \end{array}$$

y dar condiciones suficientes para que este procedimiento se pueda realizar.

3 Sistemas lineales: métodos iterativos

Ejercicio 3.1 .- Hallar un valor aproximado de la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 9x - 2y &= 5 \\ -2x + 4y - z &= 1 \\ -y + z &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

trabajando con cuatro cifras decimales únicamente, tomando $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$ y aplicando tres veces:

a) el método de Jacobi

b) el método de Gauss-Seidel

c) el método de relajación con $\omega = 1.2$

Ejercicio 3.2 .- Si la solución exacta del sistema del ejercicio 3.1 es $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{3}$, como puede comprobarse, interpretar los resultados anteriores, hallando además el valor óptimo de ω para este sistema.

Ejercicio 3.3 .- Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Se desea resolver el sistema lineal $Ax = b$ y para ello se considera el método iterativo

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{arbitrario} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b, & k \geq 0 \end{cases}$$

donde $B = I - A$.

a) Estudiar si el método propuesto es consistente.

b) Establecer una condición necesaria y suficiente sobre los valores propios de A para que el método propuesto sea convergente.

c) Para el sistema lineal

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 + \frac{9}{4}x_3 &= -2 \\ -\frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} &= 1. \end{aligned}$$

¿Es convergente el método?. Estudiar si el método de Jacobi converge. A la vista de los resultados, ¿cuál es mejor en este caso?

Ejercicio 3.4 .- Para la resolución del sistema lineal $Ax = b$ se considera el siguiente método iterativo llamado de Richardson:

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{arbitrario} \\ x^{(k+1)} = (I - A)x^{(k)} + b, & k \geq 0. \end{cases}$$

a) Comprobar que si A tiene la propiedad

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < 1 = a_{ii}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

entonces, el método de Richardson es convergente.

b) Demostrar que si se divide cada ecuación del sistema $A\,x = b$ por el elemento de la diagonal correspondiente y luego se aplica el método de Richardson al sistema lineal resultante, el resultado es equivalente a aplicar el método de Jacobi al sistema original.

c) Estudiar la convergencia del método de Jacobi cuando se aplica al sistema $Ax = b$, siendo $b = (11, 11, 11)^T$ y

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

d) Partiendo del vector inicial $(2, 2, 2)^T$, calcular una iteración de los métodos de Richardson, Jacobi y Gauss-Seidel para el sistema $A\,x = b$ con $b = (10, 8, 10)^T$ y

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.5 .- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ -b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

a) Hallar la relación que debe verificarse entre a, b y c para que el sistema $Ax = B$ tenga solución única. Se considerará en adelante que se verifica esta relación.

b) Hallar la relación entre a, b y c para que sea convergente el método de Jacobi aplicado al sistema $Ax = B$.

c) Considerando el caso particular en que $b = 0$, verificar que en este caso los algoritmos de Gauss-Seidel y Jacobi convergen ó divergen simultáneamente.

d) ¿Para qué valores de a, b y c las matrices A correspondientes son simétricas definidas positivas?. Estudiar en ese caso la convergencia de los algoritmos de Gauss-Seidel y Jacobi.

Ejercicio 3.6 .- Se desea resolver el sistema lineal $Ax = b$ y para ello se considera el siguiente método iterativo, con $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \quad \text{arbitrario} \\ x^{(k+1)} = (I - \alpha A)x^{(k)} + c, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

a) Determinar c para que el método sea consistente.

b) Suponiendo los valores propios de A reales, probar que el método es convergente si $\lambda \in (0, \dfrac{2}{\alpha})$, para todo λ, valor propio de A.

c) Determinar los valores de α que hacen convergente el método iterativo cuando se aplica a la resolución del sistema lineal:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 3.7 .- Sea un sistema $Ax = b$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar los radios espectrales de las matrices de Jacobi y Gauss-Seidel. ¿Qué se observa de los resultados obtenidos?.

Ejercicio 3.8 .- Para resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 - ax_2 = b_1 \\ -ax_1 + x_2 = b_2 \end{cases}$$

se va a aplicar el método de relajación con parámetro ω comprendido entre 0 y 2.

a) Sea $a = \frac{1}{2}$. Hallar el radio espectral de la matriz del método para $\omega = 0.1, 1/2, 1, 3/2$ y 2.

b) De a) deducir cuál es el mejor valor entre todos los de ω respecto a rapidez de convergencia y cuál es el mejor entre los que verifican $0 < \omega < 2$.

Ejercicio 3.9 .- En la resolución del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hacer un estudio completo de la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación.

Ejercicio 3.10 .- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix},$$

se considera el método iterativo dado por

$$x^{(k+1)} = (I - \alpha D^{-1} A)\, x^{(k)} + \alpha D^{-1} b, \quad k \geq 0$$

siendo D la matriz diagonal de A y $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de α el método propuesto converge?, razonar la respuesta.

Ejercicio 3.11 .- Se pretende resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz B_J de iteración del método de Jacobi y las normas $\|B_J\|_\infty$ y $\|B_J\|_1$. Con los valores obtenidos para estas normas, ¿se puede asegurar la convergencia del método de Jacobi?.

b) Estudiar la convergencia del método de Jacobi cuando se aplica a la resolución del sistema lineal anterior.

c) Cuando se aplican los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel al sistema lineal anterior partiendo de la aproximación inicial $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ y tolerancia $= 10^{-7}$, se obtienen los siguientes resultados:

- Jacobi: converge en 41 iteraciones a $x^{(41)} = (-6.1111110, -0.3333331, -1.1111110)$
- Gauss-Seidel: converge en 15 iteraciones a $x^{(15)} = (-6.11111104, -0.3333331, -1.1111110)$

Indicar razonadamente por qué se cree que un método es más rápido que el otro.

4 Sistemas lineales: métodos tipo gradiente

Ejercicio 4.1 .- Demostrar que si A es una matriz simétrica y definida positiva, el gradiente del funcional $J(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$ es $Ax - b$. Comprobar que el valor mínimo de $J(x)$ es $-\frac{1}{2}b^T A^{-1}b$.

Ejercicio 4.2 .- Demostrar que si A es una matriz simétrica definida positiva y denotamos por $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, $e^{(k)} = x - x^{(k)}$, siendo x la solución del sistema $Ax = b$, entonces:

a) $(r^{(k)})^T \cdot e^{(k)} \geq 0$.

b) $(r^{(k)})^T \cdot e^{(k)} = 0$ si y sólo si $Ax^{(k)} = b$.

Ejercicio 4.3 .- Dado el funcional $J(x) = \dfrac{x^T A\, x}{x^T B\, x}$, donde A y B son matrices simétricas y B definida positiva, probar :

$$\text{grad } J(x) = \frac{2}{x^T Bx}\,(Ax - J(x)\,Bx).$$

Ejercicio 4.4 .- ¿Qué condiciones tiene que cumplir el parámetro t_k del método del gradiente para que éste sea equivalente al de Richardson de los métodos iterativos?. ¿Qué condiciones tienen que cumplir t_k y A para que el método del gradiente sea equivalente al método de Jacobi?

Ejercicio 4.5 .- Resolver el sistema $Ax = b$, con $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $b = (\,-2 \quad 2\,)^T$:

a) aplicando el método del gradiente

b) aplicando el método del gradiente conjugado.

Ejercicio 4.6 .- Sea A una matriz simétrica regular, $Ax = b$ e y un vector arbitrario. Sea q dada por $q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$. Demostrar:

$$(x - y)^T A\,(x - y) = b^T A^{-1}b + 2q(y)\,.$$

Esto demuestra que minimizar $q(y)$ es equivalente a minimizar $(x - y)^T A(x - y)$.

5 Resolución numérica de ecuaciones no lineales.

Ejercicio 5.1 .- Comprobar que la ecuación $x^3-x-1=0$ tiene una única raíz en el intervalo $[1,2]$. ¿Cuántas iteraciones del método de bisección se deben realizar para aproximar dicha raíz con un error menor que 10^{-4}?

Ejercicio 5.2 .- Sea la función $g(x)=\sqrt{2+x}$, definida en el intervalo $I=[0,7]$. Comprobar que tiene un único punto fijo en I que se puede obtener a partir de cualquier $x_0 \in I$.

Ejercicio 5.3 .- Dada $g(x)=x^2-2x+2$, encontrar un intervalo I tal que para todo x_0 de I la iteración $x_{n+1}=g(x_n)$, $n \geq 0$, sea convergente. ¿Cuál es el orden de convergencia?

Ejercicio 5.4 .- Probar que la ecuación $x-\cos x=0$ tiene una única raíz en $[0,\frac{\pi}{2}]$. Considerar el esquema iterativo:

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario} \\ x_{n+1}=\cos x_n, \ \ n \geq 0 \end{cases}$$

y probar su convergencia.

Ejercicio 5.5 .- Estudiar qué valores deben tomar a y b en

$$g(x)=\frac{x^3+ax}{bx^2+3},$$

para que el método $x_{n+1}=g(x_n)$ proporcione la raíz cuadrada positiva de 3, con convergencia local al menos cuadrática.

Ejercicio 5.6 .- Aplicar el método de Newton-Raphson para calcular la raíz cúbica de un número $k>0$.

Ejercicio 5.7 .-

a) Hallar las condiciones que debe cumplir la función $h(x)$ para que la iteración

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-c}{2x_n}h(x_n), \quad n \geq 0,$$

produzca $\sqrt{c}$ (c real positivo) con convergencia al menos cúbica si se parte de un x_0 próximo a $\sqrt{c}$.

b) Hallar $h(x)$ de la forma $a+bx^2$ satisfaciendo esas condiciones.

Ejercicio 5.8 .-

a) Probar que el método de Newton aplicado al cálculo de raíces múltiples tiene orden de convergencia lineal.

b) Comprobar que si se modifica como

$$x_{n+1}=x_n-m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

donde m es la multiplicidad algebraica de la raíz que se quiere calcular, la convergencia es cuadrática.

Ejercicio 5.9 .- Sea la sucesión definida por:

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \ n \geq 1.$$

a) Probar que converge a $\sqrt{2}$ cuando $x_0 \geq \sqrt{2}$.

b) Usar el hecho de que $0 < (x_0 - \sqrt{2})^2$ si $x_0 \neq \sqrt{2}$ para probar que si $0 < x_0 < \sqrt{2}$, entonces $x_1 > \sqrt{2}$.

c) Usar los resultados anteriores para probar que la sucesión converge a $\sqrt{2}$ si $x_0 > 0$.

Ejercicio 5.10 .- Al resolver la ecuación arctg $x = 0$ utilizando el método de Newton-Raphson con valor inicial $x_0 = 2$, se obtienen los resultados de la tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3.536	13.95	-279.3	1.22*10^5	-2.33*10^6	8.59*10^{20}

.

Explicar lo sucedido y demostrar que puede corregirse este comportamiento partiendo de otro valor inicial.

Ejercicio 5.11 .- Sea f una función tres veces diferenciable con continuidad de la que buscamos un cero simple α.

a) Deducir la fórmula correspondiente al método iterativo que obtiene x_{n+1} evaluando en cero el polinomio de Taylor de grado menor o igual que dos de la función inversa f^{-1} de f en $f(x_n)$.

b) Probar que el método descrito tiene orden de convergencia al menos tres para ceros simples y determinar la constante asintótica del error cuando el orden es tres.

Ejercicio 5.12 .- Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{2} - x + \dfrac{7}{24} & = 0 \\ xy - y + \dfrac{1}{9} & = 0 \end{cases}$$

tiene una solución única en el intervalo $[0, 0.4] \times [0, 0.4]$. Aplicar tres veces el método de Newton-Rapson para el cálculo aproximado de dicha solución.

Ejercicio 5.13 .- Aplicar el método de Newton para calcular la solución del sistema no lineal:

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{sen}(x_1 + x_2) \\ x_2 = \cos(x_1 - x_2) \end{cases}$$

cerca de $x_1 = 1, x_2 = 1$. Detener el proceso cuando la diferencia entre dos iteraciones consecutivas sea en $||\ .\ ||_\infty$ menor que 10^{-10}.

Ejercicio 5.14 .- Hallar un factor cuadrático $x^2 - px - q$ del polinomio $2x^3 + x^2 + 3x - 2$, aplicando el método de Bairstow tres veces, partiendo de $p_0 = 0$, $q_0 = -1$.

Ejercicio 5.15 .- Obtener todos los ceros del polinomio

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 14x^2 - 2x - 15$$

utilizando el método de Bairstow con factores cuadráticos del tipo $x^2 - px - q$ partiendo de $p_0 = 0$, $q_0 = -0.9$.

6 Cálculo aproximado de valores propios.

Ejercicio 6.1 .- Usar el teorema de Gerschgorin para determinar cotas para los valores propios de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.2 .- Utilizando el teorema de Gerschgorin, obtener una cota superior de $cond_2(A) = ||A||_2\, ||A^{-1}||_2$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5.2 & 0.6 & 2.2 \\ 0.6 & 6.4 & 0.5 \\ 2.2 & 0.5 & 4.7 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.3 .- Comprobar que las partes imaginarias de los valores propios de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

están situadas en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicio 6.4 .- Sea la matriz simétrica real:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & * & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 4 & * \\ * & * & * & * & 21 \end{pmatrix}$$

donde los * representan números de valor absoluto $\leq \dfrac{1}{4}$.

a) Demostrar que el método de la potencia es convergente para A, dando una idea del orden de la velocidad de convergencia.

b) Demostrar que si se toma como vector inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 1)^T$, el error en la primera iteración para calcular el valor propio dominante es $\leq \frac{1}{2}$.

Ejercicio 6.5 .- Sea u_1 un vector propio asociado al valor propio λ_1 de A y w_2 un vector propio asociado al valor propio λ_2 de B. Probar que si $B = A - \lambda_1 u_1 v^T$, entonces el vector $u_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)w_2 + \lambda_1(v^T w_2)u_1$ es un vector propio de A asociado a λ_2.

Ejercicio 6.6 .- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, con valores propios 1 y 3. Aplicar tres veces el método de la potencia $x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, partiendo de $x^{(0)} = (1, 0)^T$. ¿Cuál es el vector límite?

Ejercicio 6.7 .- Para la matriz A del problema anterior, tomando como elección inicial $x^{(0)} = (3, 4)^T$, comparar los resultados de :

a) tres pasos del método de la potencia inversa: $x^{(k+1)} = A^{-1}x^{(k)}$, o equivalentemente, $Ax^{(k+1)} = x^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$.

b) un paso del método de la potencia inversa con desplazamiento: $x^{(k+1)} = (A-\mu I)^{-1}x^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, con $\mu = \dfrac{(x^{(0)})^T A x^{(0)}}{(x^{(0)})^T x^{(0)}}$.

Ejercicio 6.8 .- Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Aplicar el método de Jacobi para obtener los valores propios de A y los vectores propios asociados.

Ejercicio 6.9 .- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$:

a) Encontrar el valor propio de módulo máximo con una tolerancia de 10^{-2} partiendo del vector $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$.

b) Probar, sin calcularlos todos, que el valor calculado en a) es realmente el de módulo máximo.

c) Teniendo en cuenta la aproximación λ_1 al valor propio de módulo máximo obtenida en a), ¿cómo se calcularía una mejor aproximación $\tilde{\lambda}_1$ con una tolerancia de 10^{-6}?.

cálculo de

Ejercicio 6.10 .- Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

a) Aplicar a A una transformación Householder para obtener una matriz tridiagonal.

b) Hacer una iteración del método QR para calcular los valores propios de A partiendo de la matriz obtenida en a) semejante a ella.

Ejercicio 6.11 .- Utilizando el método de la potencia para calcular el valor propio de módulo máximo de las matrices A y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 10^{-4} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

se han obtenido los resultados de la tabla 1.

Explicar por qué estos resultados y por qué son tan distintos en ambos casos.

Tolerancia	Num. iterac.	Val. prop.
10^{-4}	246	2.024
10^{-6}	2450	2.002
10^{-8}	24496	2.000

Tolerancia	Num. iterac.	Val. prop.
10^{-4}	87	2.098
10^{-6}	201	2.100
10^{-8}	277	2.100

Table 1: Resultados para las matrices A y B, respectivamente.

7 Interpolación y aproximación de funciones.

Ejercicio 7.1 .- Construir la tabla de diferencias divididas de la función $f(x) = x^3$ en los puntos $0, 1, 3$, y 4. A partir de ella escribir la expresión del polinomio de interpolación de f en la forma de Newton. Escribir también la forma de Lagrange y comprobar que los dos polinomios son x^3.

Ejercicio 7.2 .- Dada la siguiente tabla de la función $f(x) = e^x$

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$f(x)$	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221

a) Hallar los valores aproximados de $\sqrt[3]{e}$ por interpolación lineal y cúbica, utilizando las expresiones de Lagrange y de Newton, respectivamente, de los interpolantes.

b) Dar cotas de los errores debidos a la interpolación y comparar dichas cotas con el error exacto sabiendo que $\sqrt[3]{e} = 1.395612425\ldots$

Ejercicio 7.3 .- a) Encontrar las fórmulas de Lagrange y de Newton del polinomio de interpolación para los siguientes datos

x	-2.0	0.0	1.0
$f(x)$	0.0	1.0	-1.0

b) Escribir ambos polinomios en la forma $a + bx + cx^2$ para ver que son idénticos.

Ejercicio 7.4 .- Probar que si g interpola a la función f en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ y h interpola a f en $x_1, \ldots, x_n$, entonces la función

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(g(x) - h(x))$$

interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$. (Notar que h y g no necesitan ser polinomios).

Ejercicio 7.5 .- Dada la siguiente tabla

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$J_0(x)$	0.2239	0.1666	0.1104	0.0555	0.0025	-0.0484

de la función de Bessel de orden 0,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} t)\, dt,$$

utilizar el método de las diferencias divididas de Newton para hallar los valores de $J_0(x)$ para $x = 2.15$, $x = 2.25$ y $x = 2.35$ con errores menores que $\frac{10^{-3}}{2}$, considerando las abscisas consecutivas de la tabla $x_0, x_1, \ldots, x_m$ de manera que $x_0 < x < x_1$.

Ejercicio 7.6 .- Construir el polinomio de interpolación de Hermite para los siguientes datos:

a)

x	-1	0	2
$f(x)$	1	2	6
$f'(x)$	0	1	1

b)

x	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.5207843	0.5104147	0.4813306
$f'(x)$	-0.0014878	-0.1004889	-0.1883635

Ejercicio 7.7 .- Disponemos de los siguientes datos sobre una función f :

x	0.4	0.5
$f(x)$	1.554284	1.561136
$f'(x)$	0.243031	-0.089618

a) Hallar la abscisa del máximo de f en $[0.4, 0.5]$, aproximándola por el máximo del polinomio interpolador de Hermite $p_3(x)$ a la tabla dada de f.

b) Suponiendo que $f \in C^4([x_0, x_1])$, hallar la siguiente expresión para la derivada, e_3', del error en la interpolación de Hermite en dos abscisas $x_0 < x_1$:

$$e_3'(x) \equiv f'(x) - p_3'(x) = \frac{f^{(4}(\eta(x))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - \zeta)\,,$$

donde $\zeta \in (x_0, x_1)$ y $\eta(x) \in (\min\{x_0, x_1, x\}, \max\{x_0, x_1, x\})$.

c) Acotar el error en la abscisa del máximo debido a la interpolación, sabiendo que $\left|f^{(4}(x)\right| < 10^3$ y $\left|f^{(2}(x)\right| > 1 \forall x \in (0.4, 0.5)$.

Ejercicio 7.8 .- Dada la función

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x - x^3, & x \in [0,1] \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3, & x \in [1,2] \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

a) Comprobar si esta función coincide o no con el spline cúbico natural que interpola los puntos (0,1), (1,1), (2,0) y (3,10).

b) Utilizar el spline cúbico natural para aproximar el valor de la derivada de la función interpolada en $x = 1$.

Ejercicio 7.9 .- Se desea interpolar $f(x) = |x|$ por un spline cubico natural $S(x)$, y contrastar el resultado con la interpolación polinomial. Tomando los puntos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$, como puntos de interpolación, construir la tabla de valores de $S(x)$ y del polinomio de interpolación $p(x)$ para $x = 1, 1.2, 1.4, 1.6$ y 2.0. Contrastar también los valores de las derivadas en esos puntos.

Ejercicio 7.10 .- Hallar el spline cúbico natural de nodos $-h, 0, h$ que interpola a una función dada f en esos puntos. En concreto, hallar el spline que interpola a $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ en $-1, 0, 1$. Hallar también el spline cúbico "clamped" (frontera sujeta) para la función, y los nodos anteriores, y evaluar el error cometido por los dos splines en el punto $x = 0.5$ para la función y la derivada.

Ejercicio 7.11 .- Dadas las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en [1, 2],

b) $f(x) = \cos \pi x$, en [0,1],

c) $f(x) = x^3 - 1$, en [0, 2],

d) $f(x) = |x|$, en [-1, 1], con función peso $(1 - x^2)^{-1/2}$,

hallar el polinomio de segundo grado mejor aproximación por mínimos cuadrados de cada una de ellas.

8 Derivación e integración numérica.

Ejercicio 8.1 .- Utilizando desarrollos de Taylor deducir el término del error para la fórmula

$$f''(x) \simeq \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2}.$$

Ejercicio 8.2 .- Utilizando desarrollos de Taylor deducir el término del error para las siguientes aproximaciones de la derivada primera:

$$f'(x) \simeq \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

y averiguar cuál de ellas es más exacta.

Ejercicio 8.3 .- Demostrar que si la derivada segunda se aproxima por la fórmula

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

el error admite un desarrollo en serie de la forma $a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \ldots$ Aplicar dos pasos del proceso de extrapolación de Richardson a esta aproximación para obtener una fórmula de orden seis que aproxime a $f''(x)$.

Ejercicio 8.4 .- Hallar a_1 y a_2 para que la fórmula de derivación numérica

$$f'(1/2) \simeq a_1 f(0) + a_2 f(\frac{1}{2})$$

sea exacta para las funciones 1 y x.

Ejercicio 8.5 .- Dar una expresión del error en la fórmula

$$f'(\frac{a+b}{2}) \simeq a_1 f(a) + a_2 f(b)$$

si ésta es de tipo interpolatorio y $f \in C^{(3}([a,b])$.

Ejercicio 8.6 .- La fórmula

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

¿puede ser exacta para algún polinomio de grado 3?. Razonar la respuesta.

Ejercicio 8.7 .- Dada la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq b_0 f(x_0) + b_1 f(1)$$

a) Determinar los pesos b_0 y b_1 y el nodo x_0 para que tenga grado de precisión 2.

b) Obtener la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio con los nodos $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_1 = 1$ para la integral

$$\int_0^1 f(x)dx$$

¿Cuál es el grado de precisión para la fórmula obtenida?.

Ejercicio 8.8 .- Comprobar que la fórmula de Simpson integra exactamente hasta los polinomios de tercer grado.

Ejercicio 8.9 .-

a) Comprobar que la siguiente fórmula de cuadratura tiene grado de precisión ≥ 4

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{90}\left[7f(0) + 32f(\frac{1}{4}) + 12f(\frac{1}{2}) + 32f(\frac{3}{4}) + 7f(1)\right]$$

b) A partir de la anterior, obtener una fórmula con grado de precisión ≥ 4 para

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejercicio 8.10 .- Determinar una fórmula de cuadratura de la forma

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \alpha\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

que integre exactamente los polinomios hasta grado 2 (es decir, con grado de precisión ≥ 2).

Ejercicio 8.11 .- Se considera la fórmula de cuadratura numérica de Newton-Cotes (abierta o cerrada) en el intervalo [0, n]:

$$\int_0^n g(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} b_i g(i) + M\, g^{(p+1)}(\zeta),\ \ \zeta \in [0, n],$$

donde p es el grado de precisión de la misma. Esta fórmula tiene $n+1$ nodos: $0, 1, \ldots, n$, si es cerrada, y $n-1$ nodos: $1, 2, \ldots, n-1$, si es abierta. Se pide:

a) Sabiendo que la fórmula no es exacta para $g(t) = t^{p+1}$, determinar que la constante M del error viene dada por:

$$M = \frac{1}{(p+1)!}\left[\frac{n^{p+2}}{p+2} - \sum_{k=0}^{n} k^{p+1} b_k\right]$$

b) Demostrar que cuando el intervalo de integración es $[a, b]$, la expresión de la fórmula de cuadratura es

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=0}^{n} b_i f(a + i\,h) + h^{p+2}\,M\,f^{(p+1)}(a + \zeta h), \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Ejercicio 8.12 .- Teniendo en cuenta el resultado del ejercicio anterior,

a) determinar el término del error para la fórmula del trapecio, la fórmula de Simpson y la fórmula de Simpson tres octavos,

b) determinar el término del error para las fórmulas de Newton-Cotes abiertas con n = 2 (fórmula del punto medio), n = 3 y n = 4.

Ejercicio 8.13 .- Dadas las fórmulas de cuadratura del trapecio, de Simpson y del punto medio con sus respectivos términos del error (cf. Burden-Faires), determinar el número de subintervalos y el paso necesarios para aproximar con una precisión de 10^{-4} la integral

$$\int_1^3 e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

cuando se utiliza:

a) La regla del trapecio compuesta

b) La fórmula de Simpson compuesta

c) La fórmula del punto medio compuesta.

Ejercicio 8.14 .- Determinar una fórmula de cuadratura gaussiana de la forma

$$\int_1^3 e^x \operatorname{sen} x \, dx \simeq b_0\, f(x_0) + b_1\, f(x_1) + b_2\, f(x_2) + b_3\, f(x_3)$$

con grado de precisión 7.

Ejercicio 8.15 .- Determinar una fórmula de cuadratura con grado de precisión ≥ 3 de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)dx \simeq b_0 f(x_0) + b_1 f(x_1)$$

a) cuando $w(x) = x$

b) cuando $w(x) = x^2$.

Ejercicio 8.16 .- Determinar una fórmula de cuadratura de Gauss-Chebyshev con grado de precisión 3 y de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)\, w(x)\, dx \simeq b_0 f(x_0) + b_1 f(x_1), \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejercicio 8.17 .- Determinar una fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre con grado de precisión 3 y de la forma

$$\int_0^\infty f(x)\, w(x)\, dx \simeq b_0 f(x_0) + b_1 f(x_1), \quad w(x) = e^{-x}$$

9 Resolución numérica de PVI.

numérica

Ejercicio 9.1 .- Los métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial también se pueden utilizar para calcular integrales.

i) Demostrar que todo problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

es equivalente a la ecuación integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

ii) Comprobar que se puede calcular

$$\int_0^{0.1} e^{-s^2}\, ds$$

resolviendo el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = e^{-t^2}, \quad t \in [0, 0.1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

iii) Aplicar el método Runge-Kutta de orden 4 (RK4) con paso h = 0.1 para aproximar el valor de la integral dada en ii).

Ejercicio 9.2 .- Comprobar que cuando se aplica el método Runge-Kutta de orden 4 (RK4) para resolver (en un paso) el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t), \quad t \in [a, b] \\ y(a) = 0 \end{cases}$$

es equivalente a la fórmula de Simpson para aproximar la integral

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

Ejercicio 9.3 .- Obtener su tabla de coeficientes y estudiar el orden de consistencia de los siguientes métodos:

a) Trapecio: $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$

b) Heun: $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))]$

c) Euler modificado: $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} f(t_n, y_n))$

d) El método de un paso: $y_{n+1} = y_n + h\, \phi(t_n, y_n; h)$,

siendo $\phi(t, y; h) = (1 - \alpha)\, f(t, y) + \alpha\, f(t + \dfrac{h}{2\alpha}, y + \dfrac{h}{2\alpha} f(t, y)), \quad \alpha \neq 0$

Ejercicio 9.4 .- Considerar el siguiente método: $y_{n+1} = y_n + h\,\phi(t_n, y_n; h)$ siendo $\phi = \frac{2}{9}k_1 + \frac{3}{9}k_2 + \frac{4}{9}k_3$, donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + (\frac{3}{4} - \alpha)hk_2 + \alpha hk_3) \end{aligned}$$

para la resolución del PVI:

$$y'(t) = f(t, y), \quad 0 < t < b, \quad y(0) = y_0$$

a) Escribir su tabla de coeficientes

b) Estudiar el orden del método según los valores de α.

Ejercicio 9.5 .- Se llama método Runge-Kutta de Gill al método que viene dado por la tabla de coeficientes

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & (\sqrt{2}-1)/2 & (2-\sqrt{2})/2 & & \\ 1 & 0 & -\sqrt{2}/2 & (2+\sqrt{2})/2 & \\ \hline & 1/6 & (2-\sqrt{2})/6 & (2+\sqrt{2})/6 & 1/6 \end{array}$$

Comprobar que este método es de orden 4 y escribir las ecuaciones que lo definen.

Ejercicio 9.6 .- Considerar la tabla Runge–Kutta

$$\begin{array}{c|ccl} 0 & 0 & & \\ 1/4 & 1/4 & & \\ 2/3 & \alpha & 2/3\text{-}\alpha & \\ \hline & b_1 & b_2 & 0 \quad \text{(orden 2)} \\ \hline & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{b}_3 \quad \text{(orden 3)} \end{array}$$

i) Hallar el valor de α y de los parámetros b_i, $\hat{b}_i$ de manera que se obtenga un par encajado de órdenes 2(3).

ii) Calcular la función de amplificación de ambos métodos y probar que el intervalo de estabilidad absoluta de cualquiera de ellos contiene a $[-2, 0]$.

iii) Para la integración del problema de valor inicial $y' = -10(y - t) + 1$, $y(0) = 0$, calcular el paso de integración de manera que la integración numérica de este problema sea estable.

Ejercicio 9.7 .- Construir los pares de métodos encajados de órdenes 1 y 2 que son de la forma

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1 & b_2 \\ \hline & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \end{array}$$

Ejercicio 9.8 .- Calcular la función de estabilidad para los siguientes métodos:

i) El método RK4

ii) El método de HEUN

iii) El método de RUNGE y determinar el intervalo de estabilidad absoluta

iv) El método de EULER y determinar el intervalo de estabilidad absoluta

Ejercicio 9.9 .- Se considera el método Runge-Kutta definido por la tabla siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 2/3 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

a) Determinar los coeficientes para que tenga orden tres.

b) Calcular la función de estabilidad para el método obtenido en el apartado anterior. A la vista de los resultados, ¿se podría afirmar que el método es A-estable?.

c) Calcular el intervalo de estabilidad absoluta del mencionado método.

Ejercicio 9.10 .- Estudiar el orden alcanzado y calcular la función de estabilidad y el intervalo de estabilidad para cada uno de los siguientes métodos implícitos:

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Ejercicio 9.11 .-

a) Estudiar el orden alcanzado por los siguientes métodos implícitos:

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & \alpha & 0 \\ 1-\alpha & 1-2\alpha & \alpha \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

b) Calcular la función de estabilidad y el intervalo de estabilidad absoluta para cada uno de ellos

c) Comprobar que, cuando se aplican estos métodos, con $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, para resolver (en un paso) el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t), & t \in [a, b] \\ y(a) = 0, \end{cases}$$

son equivalentes a la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre con 2 nodos (x_0, x_1) para aproximar la integral

$$\int_a^b f(t)\, dt$$