CÁLCULO NUMÉRICO

Práctica 5. Integración numérica

Con esta práctica se pretende completar los aspectos teóricos tratados en clase. En particular se aplican fórmulas de Newton–Cotes, fórmulas de cuadratura compuestas, el método de Romberg y las principales fórmulas de cuadratura Gaussianas.

Ejercicios Propuestos

1. Se considera la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Deduce la expresión de la fórmula de cuadratura de Newton–Cotes cerrada con dos nodos (regla del trapecio), sustituyendo $f(x)$ por su polinomio interpolador en los puntos a y b.

2. (a) Sea la fórmula de cuadratura numérica

$$\int_0^n g(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} b_i g(i) + E(g)\,, \quad E(g) = M g^{(p+1)}(\eta)\,,$$

donde p es el grado de precisión de la misma. Si $p = n$, halla el sistema lineal asociado en el caso de las fórmulas de Newton–Cotes cerradas, comprobando que la matriz de coeficientes es de Vandermonde.

(b) Sabiendo que la fórmula anterior no es exacta para $g(t) = t^{p+1}$, comprueba que la constante del error viene dada por

$$M = \frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{n^{p+2}}{p+2} - \sum_{k=0}^{n} k^{p+1} b_k\right).$$

(c) Demuestra que cuando el intervalo de integración es $[a, b]$, la fórmula anterior se expresa

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{i=0}^{n} b_i f(a+ih) + M h^{p+2} f^{(p+1)}(a+\eta h)\,, \quad h = \frac{b-a}{n}\,.$$

(d) Ejecuta la aplicación **prob2** para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y observa que para valores "grandes" de n la matriz de coeficientes del sistema lineal está mal condicionada. Obtener además:

   i. Los coeficientes b_i.
   ii. Las constantes de error.
   iii. El grado de precisión.

3. Suponiendo que las fórmulas de Newton–Cotes cerradas y abiertas simples para el mismo número de evaluaciones de la función $f(x)$, tuvieran aproximadamente el mismo error, ¿por cuál te decidirías para la implementación de una fórmula compuesta?. Explica la respuesta.

4. (a) Se desea calcular aproximadamente el valor de la integral

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

utilizando las fórmulas compuestas del trapecio y de Simpson, dividiendo el intervalo de integración en $n =$ 10, 20, 40, 80, 160, 320 y 640 subintervalos iguales.

   i. Obtener una estimación de los errores $E(h)$, $h = (b - a)/n$.
   ii. Ejecuta la aplicación **prob4** para obtener los valores que proporcionan dichas fórmulas compuestas, así como los errores correspondientes.
   iii. Desde los errores obtenidos en el apartado anterior, calcula los sucesivos cocientes $\dfrac{E(h)}{E(h/2)}$. Si el error $E(h) \approx Ch^p$, calcula el valor de p.

   (b) Lo mismo para la integral I_2 dada por

$$I_2 = \int_0^{100\pi} \operatorname{sen} x \, dx$$

5. Comprueba que si se hace una extrapolación de Richardson (método de Romberg) con la regla del trapecio compuesta se obtiene el método de Simpson.

6. Calcula con ayuda de la aplicación **prob6**

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + 0.0001}$$

por el método del trapecio y el de Simpson. Compara el resultado con el que ofrece el método de Romberg, sabiendo que el valor de la integral es 9.21044036697652. Explica los resultados.

7. Con la aplicación **prob7** calcula la integral

$$\int_0^4 e^x \, dx$$

con un error menor que 10^{-4} utilizando las fórmulas compuestas del trapecio y de Simpson. Compara los resultados obtenidos con los que resultan de la aplicación de fórmulas de cuadratura Gaussianas simples. El valor exacto es $e^4 - 1 = 53.59815003314424$.

8. Aproxima el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + (230x - 30)^2}$$

mediante la aplicación **prob8**, que utiliza el algoritmo de Romberg y fórmulas Gaussianas.

9. Teniendo en cuenta la expresión

$$\pi = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}\,,$$

intenta aproximar el valor de π utilizando fórmulas de cuadratura Gaussianas de Legendre y de Chebyshev (**prob9**). Discute si se pueden aplicar fórmulas de Newton–Cotes cerradas.

10. Aproxima el valor de la integral

$$\int_0^5 E[x] \, dx$$

donde $E[x]$ denota la función *parte entera de* x, utilizando las fórmulas compuestas del trapecio y del punto medio con 3, 5 y 7 subintervalos. Observa el comportamiento de lo sucedido.

11. Explica diferentes maneras de calcular la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x) e^{-x}\, dx\,.$$

Utiliza la aplicación **prob11**.

12. Aplica el método de Simpson al cálculo de las integrales dobles

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy\,,$$

$$\int_0^1 \int_0^x e^{xy}\, dy\, dx\,.$$