Cálculo numérico. Práctica 4: Interpolación y Aproximación.

Objetivos generales:

Destacar diversos aspectos teórico–prácticos relativos a la interpolación polinómica y a la aproximación uniforme y por mínimos cuadrados. **Introducir** otros interpolantes: polinomios de Hermite y splines cúbicos .

Para desarrollar esta práctica han sido creadas diversas aplicaciones que contienen los métodos de Lagrange, Newton, Hermite, spline cúbico natural y spline cúbico forzado (clamped).
cierta
Para dibujar se utiliza la aplicación **Wgnuplot** y basta cargar (load) el fichero que se indica en los ejercicios.

Ejercicios propuestos

1.- Dado el conjunto de puntos:

$$\{(-1,10),(0,9),(1,7),(2,5),(3,4),(4,3),(5,0),(6,-1)\}$$

a) Dibujarlos en el plano.

b) Discutir las diferencias entre los siguientes dos métodos propuestos para obtener una función que los "represente" lo más fielmente posible:

Método 1: Aproximación lineal por mínimos cuadrados discretos, siendo $y = a + bx$ la recta de regresión con

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

siendo $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, los puntos dados.

Método 2: Interpolación polinómica de grado ≤ 7.

Ejecuta la aplicación **ejer1** y para dibujar el fichero **ord1.txt**.

2.- Para los siguientes conjuntos de datos, construir la tabla de diferencias divididas y deducir el grado del polinomio de interpolación que pasa por ellos:

a) $\{(1,-3),(2,0),(3,15),(4,48),(5,105),(6,192)\}$,

b) $\{(0,1),(1,0.5403),(2,-0.4161),(3,-0.9899),(4,-0.6536)\}$.

Ejecuta la aplicación **newton** y para dibujar el fichero **ord2.txt**.

3.- Dado el conjunto de puntos: $(11,1),(12,0),(13,1),(14,3)$, se considera el polinomio de interpolación $p_3(x)$, expresado de las tres formas siguientes:

i) $p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$,

ii) $p_3(x) = \overline{a}_0 l_0(x) + \overline{a}_1 l_1(x) + \overline{a}_2 l_2(x) + \overline{a}_3 l_3(x)$ siendo $l_i(x)$; $i = 0, 1, 2, 3$, los polinomios de Lagrange,

iii) $p_3(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1(x - x_0) + \tilde{a}_2(x - x_0)(x - x_1) + \tilde{a}_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$, donde las x_i; $i = 0, 1, 2$ son las abscisas de los tres primeros puntos dados.

y se pide:

a) Plantear los sistemas de ecuaciones lineales asociados a cada una de las formas del polinomio de interpolación $p_3(x)$.

b) Obtener las matrices de coeficientes de los sistemas anteriores. Cuál está mejor condicionada?.

c) Si se quisiera añadir un punto nuevo (x_4, y_4) a los datos, ¿en qué casos se podría utilizar el polinomio calculado $p_3(x)$ para calcular $p_4(x)$?.

Ejecuta las aplicaciones **lagrange** y **newton** y para dibujar el fichero **ord2.txt**.

4.- Interpolación inversa. Se puede utilizar la interpolación para obtener una raíz aproximada de una ecuación, en ciertos casos.

Así, sea $f \in C^{(1}[a, b]$ tal que $f'(x) \neq 0$ en $[a, b]$, y sea $p \in [a, b]$ una raíz de f que queremos hallar aproximadamente. Si $x_0, \ldots, x_n$ son $(n + 1)$ puntos distintos de $[a, b]$ y $f(x_i) = y_i (i = 0, \ldots, n)$, podemos escribir $f^{-1}(y_i) = x_i$ ($f' \neq 0$ en $[a, b]$). Podemos, pues, hallar el polinomio de interpolación de f^{-1} de grado n en los nodos $y_0, \ldots, y_n$ y tomar como valor aproximado de p el valor de dicho polinomio en 0, ya que sabemos que $f(p) = 0$, ó sea $p = f^{-1}(0)$.

Ejercicio. La ecuación: $x - 9^{-x} = 0$, tiene solución única en $[0, 1]$. Aproximarla, mediante interpolación inversa sobre los nodos $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$.

Ejecuta la aplicación **ejer4** y para dibujar el fichero **ord4.txt**.

5.- El error en la interpolación polinómica de grado 3 para una función $f \in C^{(4}[a, b]$ en los nodos: $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \leq b$, puede estimarse por:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_3(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} \frac{|x - x_0||x - x_1||x - x_2||x - x_3|}{4!} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4}(x)|$$

De esta acotación, el factor:

$$\max_{a \leq x \leq b} \frac{|x - x_0||x - x_1||x - x_2||x - x_3|}{4!} \tag{2}$$

es independiente de la función, pero depende de los puntos.

Ejercicio. Dar cuaternas (x_0, x_1, x_2, x_3) de puntos en $[-1, 1]$ y comparar las correspondientes gráficas de la función: $|x - x_0||x - x_1||x - x_2||x - x_3|/4!$, con la obtenida mediante los nodos del polinomio de Chebyshev $T_4(x)$. ¿Cuál crees que es la que minimiza el factor (2)?

Nota. Los polinomios de Chebyshev pueden generarse usando la siguiente relación de recurrencia:

$$T_0(x) = 1, \; T_1(x) = x, \; T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \; k = 2, 3, \ldots$$

El polinomio de Chebyshev $T_N(x)$ tiene N ceros distintos en $[-1, 1]$:

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2N}, \; k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Ejecuta la aplicación **chebyshev** y para dibujar el fichero **ord5.txt**.

6.- Se considera la función $f(x) = 1/(1+25x^2)$ en $[-1, 1]$.

Para valores de $n \leq 20$

a) Dibujar la gráfica del polinomio de interpolación $p_n(x)$, en $n+1$ nodos igualmente espaciados del intervalo $[-1, 1]$, por medio del método de Newton.

Para la función dada y con nodos igualmente espaciados se puede observar que la sucesión $(p_n(x))$ no converge a $f(x)$ cuando $n \to +\infty$ (*Fenómeno de Runge*).

b) Dibujar la gráfica del polinomio de interpolación tomando como nodos los ceros del polinomio de Chebyshev $T_n(x)$.

A qué es debido el resultado?

Ejecuta la aplicación **ejer6** y para dibujar el fichero **ord4.txt**.

7.- Dada la siguiente tabla de valores

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	3	1
1	4	2
2	5	-1

aproximar los valores de $f(0.5)$ y $f(1.5)$ utilizando el polinomio interpolador de Hermite.

Ejecuta la aplicación **hermite** y para dibujar el fichero ord7.txt .

8.- Se desea construir un polinomio de interpolación de la función $f(x) = \log(1+x)$ en $n+1$ puntos del intervalo $[0, 1]$.

a) Para varios valores de n, obtener una cota superior del error en la interpolación de Lagrange.

b) Idem. en la interpolación de Hermite.

c) En el caso de 5 puntos observa el error mediante la aplicación **hermite**. Para dibujar usa el fichero **ord8.txt**.

d) Repetir para la función $f(x) = \text{sen}(px)$, con valores de $p = 1, 2, 5$ y 10. Ejecuta la aplicación **ejer8** y para dibujar el fichero **ord4.txt**.

9.- Construir el spline cúbico natural que interpola los siguientes datos, correspondientes a una función f.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Comparar las gráficas del spline obtenido y del polinomio:

$$p(x) = \frac{-(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)}{14400},$$

que interpola dichos datos.

Ejecuta la aplicación **nspline** y para dibujar el fichero **ord9.txt**.

10.- Mediante las aplicaciones **cspline** y **nspline1** y utilizando interpolantes spline cúbicos forzados (condiciones sobre la derivada primera en los extremos) y naturales respectivamente, dibujar una curva que represente el perfil superior de la figura que se muestra (usa el fichero **ord10.txt** para dibujar). Los datos se encuentran en el fichero **ej10.dat**.