CÁLCULO NUMÉRICO
Práctica 1. Sistemas lineales

Objetivos generales

Los objetivos de esta práctica son los siguientes:

1. Practicar con los métodos directos para la resolución de sistemas lineales.
2. Ver la influencia del mal condicionamiento de la matriz en la resolución de un sistema lineal.
3. Trabajar con métodos iterativos y de tipo gradiente para la resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales. Hacer hincapié en las características y particularidades de cada método.

Con los siguientes ejercicios se pretende que el alumno trabaje estos aspectos teórico prácticos con el fin de facilitar la asimilación y la comprensión de los mismos.

Ejercicios propuestos

Los siguientes ejercicios se realizarán ejecutando la aplicación **Directo.**

1. En el fichero **Ejem1a.dat** se ha almacenado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

   Resuelvelo aplicando alguno de los métodos del menú.

2. En el fichero **Ejem1b.dat** se ha modificado ligeramente el vector de términos independientes del apartado anterior, resultando el sistema:

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}$$

   Resuelvelo aplicando el mismo método del apartado anterior y explica la razón por la que se produce tal diferencia en los resultados.

3. En el ejemplo considerado en el fichero **Ejem1c.dat** se desea resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 163/60 \\ 21/10 \\ 241/140 \end{pmatrix}$$

donde los coeficientes, al ser racionales, han sido introducidos en el fichero redondeando su valor en la cuarta cifra decimal. Dicho sistema tiene por solución exacta $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$. Resuelvelo utilizando distintos métodos. ¿Qué puedes deducir de los resultados obtenidos?.

4. Considera el sistema de ecuaciones almacenado en el **Ejem1d.dat**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Halla la factorización LU de la matriz A.

   (b) Transforma la factorización anterior en LDU. ¿Qué relación hay entre la matriz L y la U? ¿Cómo se llama la factorización anterior?

   (c) ¿Cómo son los elementos diagonales de la matriz D?. La matriz A ¿es definida positiva? ¿se puede aplicar el método de Cholesky para resolver el sistema anterior?. En caso afirmativo calcula dicha factorización.

Los siguientes ejercicios se realizarán ejecutando la aplicación **Iterat**.

5. Considera el sistema de ecuaciones: **(Ejem2.dat)**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcula el radio espectral de las matrices de iteración de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel. ¿Podrías decir algo acerca de la convergencia de dichos métodos?

   (b) Resuelve el sistema de ecuaciones usando los métodos anteriores. Analiza los resultados obtenidos.

6. Dado el sistema de ecuaciones lineales: **(Ejem3.dat)**

$$\begin{array}{llll} x & & +z & = 2 \\ -x & +y & & = 0 \\ x & +2y & -3z & = 0 \end{array}$$

(a) Calcula las normas $\| J \|_1$ y $\| J \|_\infty$, siendo J la matriz de iteración del método de Jacobi. ¿Puedes deducir la convergencia del método?

(b) Resuelve el sistema por el método de Jacobi. ¿Puedes asegurar que $\rho(J) < 1$?

(c) Resuelve el sistema por el método de Gauss-Seidel.

(d) Para resolver el sistema por el método de relajación ¿qué parámetro utilizarías en este caso, mayor ó menor que 1?. Justifica la respuesta y ejecuta la aplicación.

7. Considera el sistema de ecuaciones: **(Ejem4a.dat)**

$$\begin{array}{llll} 3x & +y & +z & =4 \\ -x & +y & +3z & =4 \\ 2x & +5y & +z & =-1 \end{array}$$

Aplica el método de Jacobi para resolver dicho sistema

8. Se ha reordenado el sistema del ejercicio precedente intercambiando la segunda ecuación con la tercera **(Ejem4b.dat)**

$$\begin{array}{llll} 3x & +y & +z & =4 \\ 2x & +5y & +z & =-1 \\ -x & +y & +3z & =4 \end{array}$$

(a) Calcula la norma 1 de la matriz de iteración de Jacobi.

(b) ¿Podemos asegurar que el método de Jacobi va a converger?

(c) Resuelve el sistema aplicando dicho método.

(d) ¿Podríamos haber garantizado la convergencia del método sin calcular ninguna norma? ¿Por qué?

9. Considera el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ **(Ejem5.dat)**, donde:

(i) $A = (a_{ij})$ es una matriz 20×20 simétrica y tridiagonal con

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ii} = 2, & 1 \leq i \leq 20 \\ a_{i,i-1} = a_{i-1,i} = -1, & 2 \leq i \leq 20 \\ a_{ij} = 0, & \text{resto} \end{cases}$$

(ii) b es 20×1 con $b_i = 0.001.i$ para $1 \leq i \leq 20$.

(a) Calcula la proporción entre el número de elementos no nulos de la matriz A y el tamaño de la matriz. Si quisieras guardar esta matriz en memoria, ¿utilizarías algún almacenamiento especial? ¿Cuál?.

(b) Se sabe que para matrices tridiagonales con elementos diagonales no nulos se cumple que:

- $\rho(J)^2 = \rho(G)$, siendo J y G las matrices de iteración de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel respectivamente.

- El parámetro ω^* que minimiza $\rho(G_\omega)$ viene dado por:

$$\omega^* = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}} \qquad \text{y} \quad \rho(G_{\omega^*}) = \omega^* - 1$$

  En el ejemplo anterior, $\rho(J) = 0.9888$ y $\rho(G) = 0.9778$. Sin ejecutar las aplicaciones, ¿podrías decir a priori si la convergencia de estos métodos es lenta o rápida? ¿Cuál de estos métodos converge más rápidamente?.

(c) Ejecuta la aplicación e indica en cuántas iteraciones convergen ambos métodos a partir del vector nulo y una tolerancia de 0.0001.

(d) Calcula aproximadamente el parámetro ω^* que minimiza $\rho(G_\omega)$. ¿Cuánto vale $\rho(G_\omega)$ en este caso?

(e) A partir del vector nulo y con una tolerancia de 0.0001, completa la siguiente tabla:

ω	0.6	1	1.2	1.6	1.7	1.74	1.75	1.76	1.8
$\rho(G_\omega)$	0.9905		0.9666	0.9056	0.8479	0.7562	0.7500	0.7600	0.8000
n iterac.									

Para este último ejercicio se ejecutará la aplicación **Grad**.

10. Considera los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: **(Ejem6a.dat)**

$$\begin{array}{llllll} x_1 & -2x_2 & & -x_4 & & = 3 \\ -2x_1 & +7x_2 & +x_3 & & -x_5 & = 2 \\ & x_2 & +5x_3 & -x_4 & +2x_5 & = 1 \\ -x_1 & & -x_3 & +6x_4 & +x_5 & = 4 \\ & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & +9x_5 & = 0 \end{array}$$

y **(Ejem6b.dat)**

$$\begin{array}{llll} 7x & +y & +z & = 9 \\ -x & +2y & & = 1 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{array}$$

Aplica los métodos del gradiente y gradiente conjugado en ambos casos y analiza los resultados obtenidos.