# Cálculo Numérico (Ingeniería Industrial)

2 Septiembre 2002 Tercera convocatoria

Soluciones

## Ejercicio 1

i)

$$B_J = M^{-1}N = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$B_J v = \lambda v$. En particular:

$$-\sum_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{a_{kj}}{a_{kk}} v_j = \lambda v_k \Longrightarrow |\lambda||v_k| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}|v_j| \leq |v_k| \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

$$\Longrightarrow |\lambda| \leq \frac{\sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

ii) $A$ estrictamente diagonal dominante $\Longrightarrow |a_{kk}| > \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \Longrightarrow |\lambda| < 1 \Longrightarrow$ Jacobi converge.

## Ejercicio 2

i) Sea $l_0, l_1, l_2, l_3$ la base de Lagrange asociada a los nodos $x_0, x_0+\varepsilon, x_1, x_1+\varepsilon$. El polinomio de interpolación $p_\varepsilon$ que resulta es el siguiente

$$p_\varepsilon(x) = l_0(x) + l_1(x).$$

Dado que

$$l_0(x) = \frac{(x-x_0-\varepsilon)(x-x_1)(x-x_1-\varepsilon)}{(-\varepsilon)(x_0-x_1)(x_0-x_1-\varepsilon)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_1-\varepsilon)}{\varepsilon(x_0-x_1+\varepsilon)(x_0-x_1)}$$

se sigue que

$$p_\varepsilon(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_1-\varepsilon)(3x_0-x_1-2x+\varepsilon)}{(x_0-x_1)(x_0-x_1-\varepsilon)(x_0-x_1+\varepsilon)}.$$

ii) Por definición de $\varphi$, se tiene que

$$\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon(x) = \frac{(x-x_1)^2(3x_0-x_1-2x)}{(x_0-x_1)^3}.$$

iii) Al ser $\varphi(x)$ un polinomio de grado 3, $x_0$ y $x_1$ puntos distintos, se deduce que el polinomio de interpolación de Hermite de $\varphi(x)$ es la propia función $\varphi(x)$.

Obsérvese que

$$\varphi(x) = \frac{(x-x_1)^2(3x_0-x_1-2x)}{(x_0-x_1)^3} \Rightarrow \varphi'(x) = 6\frac{(x-x_1)(x_0-x)}{(x_0-x_1)^3}.$$

y, por consiguiente

$$\varphi(x_0) = 1, \quad \varphi(x_1) = \varphi'(x_0) = \varphi'(x_1) = 0.$$

El único polinomio de grado 3 que cumple estas condiciones es $\varphi(x)$.

**Ejercicio 3**

i)

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = f(x_0) + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3, & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = f(x_1) + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3, & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

con $x_0 = 2.2, x_1 = 2.4, x_2 = 2.6$

$h_0 = x_1 - x_0 = 0.2,\ h_1 = x_2 - x_1 = 0.2$

$\Delta_0 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0} = -0.051848,\ \Delta_1 = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{h_1} = -0.145421$

$c_0, c_1, c_2$ son la solución del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \Delta_0 - f'(x_0) \\ \Delta_1 - \Delta_0 \\ f'(x_2) - \Delta_1 \end{pmatrix}$$

que resulta

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.151081 \\ -0.280718 \\ -0.128829 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.4 & 0.2 & 0 & -0.151081 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 & -0.280718 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & -0.128829 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0.4 & 0.2 & 0 & -0.151081 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & -0.205177 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & -0.128829 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0.4 & 0.2 & 0 & -0.151081 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & -0.205177 \\ 0 & 0 & 0.342857 & -0.0702069 \end{array}\right)$$

De aquí obtenemos:

$$c_2 = -0.20477,\ c_1 = -0.234605,\ c_0 = -0.260399$$

$$d_j = \frac{1}{3h_j}(c_{j+1} - c_j),\ j = 0,1 \Rightarrow d_0 = 0.0429912,\ d_1 = 0.0497238$$

$$b_j = \Delta_j - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}),\ j = 0,1 \Rightarrow b_0 = -0.0014878,\ b_1 = -0.100489$$

ii)

$$\max_{2.2 \le x \le 2.6} |f(x) - S(x)| \le \frac{5}{384} 10^{-4} M 0.2^4 = 2.08333 \times 10^{-9} M$$

$$R(f) = \int_{x_0}^{x_2} E(x)dx = \int_{2.2}^{2.6} (f(x) - S(x))dx \Rightarrow$$

$$|R(f)| = \int_{2.2}^{2.6} |f(x) - S(x)|dx \le \int_{2.2}^{2.6} 2.08333 \times 10^{-9} M dx = 2.08333 \times 10^{-9} M (2.6 - 2.2) = 8.33333 \times 10^{-10}$$

iii) $H_5(x)$: polinomio de interpolación de Hermite, grado 5. Para $2.2 \le x \le 2.6$ se tiene:

$$f(x) - H_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi_x)}{6!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2,\ 2.2 < \xi_x < 2.6$$

$$|f(x) - H_5(x)| \le \frac{M}{6!}(x-2.2)^2(x-2.4)^2(x-2.6)^2 \Rightarrow$$

$$|R(f)| = \int_{2.2}^{2.6} |f(x) - H_5(x)|dx \le \frac{M}{720} \int_{2.2}^{2.6} (x-2.2)^2(x-2.4)^2(x-2.6)^2 dx =$$

$$\frac{M}{720} 1.95048 \times 10^{-6} = 2.70899 \times 10^{-9} M$$

iv) La menor cota de error corresponde al spline.

$$\int_{2.2}^{2.6} f(x)dx \approx \int_{2.2}^{2.6} S(x)dx = \int_{2.2}^{2.4} S_0(x)dx + \int_{2.4}^{2.6} S_1(x)dx$$

## Ejercicio 4

i) Para $i = 2$: Sumamos a la fila 2 de $(A|b)$ la fila 1 multiplicada por $(-a_1/d_1)$ para conseguir 0 en el lugar (2,1). El $c_2$ no se altera, sólo $d_2$ y $b_2$ de acuerdo con:

$$d_2 = d_2 - (a_1/d_1)c_1, \quad b_2 = b_2 - (a_1/d_1)b_1$$

y se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & & \\ 0 & d_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

En general, para $i = 2, 3, \ldots, n$ se trata de obtener 0 en el lugar $(i, i-1)$. Para ello sumamos a la fila $i$ de $(A|b)$ la fila $(i-1)$ multiplicada por $(-a_{i-1}/d_{i-1})$. El coeficiente $c_i$ no se altera, sólo $d_i$ y $b_i$ de acuerdo con las fórmulas dadas.

Se trata pues de la aplicación del algoritmo de Gauss a una matriz tridiagonal.

ii) Se obtiene el siguiente sistema triangular superior equivalente al dado:

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & & \\ 0 & d_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde los $c_i, i = 1, \ldots, n-1$, $d_1$ y $b_1$ son los dados, y los $b_i, d_i, i = 2, \ldots, n$ han sido modificados de acuerdo con las fórmulas dadas en el algoritmo.

iii)

$$\begin{aligned} & x_n = b_n/d_n \\ & \text{Para } i = n-1, n-2, \ldots, 1, \text{ hacer :} \\ & \quad x_i = (b_i - c_i x_{i+1})/d_i \end{aligned}$$

iv) Cálculo $d_i, i = 2, \ldots, n$: $(n-1)$ sumas, $(n-1)$ productos, $(n-1)$ cocientes

Cálculo $b_i, i = 2, \ldots, n$: $(n-1)$ sumas, $(n-1)$ productos, $(n-1)$ cocientes

Cálculo $x_n$: 1 cociente

Cálculo $x_i, i = n-1, \ldots, 1$: $(n-1)$ sumas, $(n-1)$ productos, $(n-1)$ cocientes

Total: $9(n-1) + 1 = 9n - 8$