Cálculo numérico (Ingeniería Industrial)

2 de febrero de 2005 Primera convocatoria

Ejercicio 1

Se considera la función

$$g(x) = \frac{1}{2}\,x + \frac{A}{2\,x}, \quad A > 0$$

a) Demostrar que $\forall x_0 \geq \sqrt{A}$, la sucesión

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

converge a un punto fijo de g. ¿Cuál es ese punto fijo?. *(1.1 puntos)*

b) Obtener el orden de convergencia del esquema iterativo dado en el apartado a) *(0.5 puntos)*

c) Sin realizar todas las operaciones, obtener la menor cota inferior posible del número de iteraciones que se necesitan para obtener $\sqrt{5}$ con un error (en valor absoluto) menor que 10^{-8}, partiendo de $x_0 = 3$. *(1 punto)*

Ejercicio 2

Dado el sistema

$$\begin{aligned} 0.1\,x_1 + 0.2\,x_2 &= 0.3 \\ 0.2\,x_1 + 113\,x_2 &= 113.2 \end{aligned}$$

a) Resolverlo por el método L U, utilizando aritmética exacta. *(0.8 puntos)*

b) Resolverlo mediante el método de eliminación gaussiana, con aritmética de redondeo de 2 dígitos y estrategia de pivote parcial. *(1 punto)*

c) Resolverlo mediante el método de eliminación gaussiana, con aritmética de redondeo de 2 dígitos y estrategia de pivote total. *(1 punto)*

Ejercicio 3

a) Determinar los valores de a, b, c de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x - 9\,x^2, & x \in [0, 1] \\ a + b\,(x-1) + c\,(x-1)^2 + d\,(x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

sea un spline cúbico con nodos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ *(0.9 puntos)*

b) Con los valores de a, b, c anteriores, calcular d para que el valor de la integral

$$\int_0^2 [f(x)]^2\,dx$$

sea mínimo. *(0.9 puntos)*

c) Encontrar el valor de d para que la función $f(x)$ anterior sea un spline cúbico natural. *(0.8 puntos)*

Ejercicio 4: cuestión práctica

Al aplicar cierta fórmula de cuadratura compuesta para calcular la integral

$$I = \int_{-1}^{1} x \operatorname{sen} x \, dx$$

se han obtenido para diferentes pasos h = (b - a)/n los siguientes resultados:

n	10	20	40	80	160	320
I_n	0.60233394	0.60233714	0.6023373445	0.602337357048	0.602337357828	0.602337357876

a) Obtener los errores correspondientes a los distintos pasos. *(0.8 puntos)*

b) A partir de los errores obtenidos en el apartado anterior, calcular el valor de p, si el error $E(h) \approx Ch^p$. *(1.2 puntos)*

Soluciones

1.a) Sea I $= [\sqrt{A}, +\infty)$.

$g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{A}{2\,x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$g'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{A}{2\,x^2}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$\forall x \in I, x \geq \sqrt{A} \Longrightarrow g'(x) \geq 0$ y $g'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{A}{2\,x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Por lo tanto, $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2} = L < 1, \forall x \in I$

En consecuencia, se cumple el teorema de convergencia global en el intervalo I (es decir, existe un único punto fijo α en I y la sucesión definida por g es convergente a $\alpha, \forall x_0 \in I$). En consecuencia, tomando límites resulta: $\alpha = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{A}{2\,\alpha} \Longrightarrow \alpha = \sqrt{A}$

1.b) $g(\sqrt{A}) = \sqrt{A}$,

$g'(\sqrt{A}) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{A}{2\,\sqrt{A}^2} = 0$

$g''(\sqrt{A}) = \dfrac{A}{A^{3/2}} \neq 0$

En consecuencia, la convergencia es de orden 2.

1.c) Teniendo en cuenta la acotación:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{L^n}{1-L}\,|x_1 - x_0| \leq 10^{-8},$$

y que: $L = 1/2, \quad x_1 = g(x_0) = g(3) = 3/2 + 5/2 \cdot 3 = 7/3$, resulta:

$$n \geq 1 + (8 - log3)/log2 \approx 25.99$$

2.a) Eliminación gaussiana (factorización L U):

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 113 & 113.2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 112.6 & 112.6 \end{bmatrix} = U, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = L\,U$$

$$A\,X = B \Longleftrightarrow L\,Z = B, \quad U\,X = Z$$

La última columna de U es la solución del sistema: $L\,Z = B$. EN consecuencia, la solución buscada es la solución del sistema $U\,X = Z$, es decir,

$$X^T = (1, 1)$$

2.b) Eliminación gaussiana con pivote parcial y precisión de 2 dígitos.

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 110 & 110 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.2 & 110 & 110 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.2 & 110 & 110 \\ 0 & 55 & 55 \end{bmatrix} = U$$

$$X^T = (0, 1)$$

2.c) Eliminación gaussiana con pivote total y precisión de 2 dígitos.

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 110 & 110 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 110 & 0.2 & 110 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 110 & 0.2 & 110 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} = U$$

$$X^T = (1, 1)$$

3.a) Continuidad en el nodo interior: $-5 = a$

Continuidad primera deriv. en el nodo interior: $-17 = b$

Continuidad segunda deriv. en el nodo interior: $-18 = 2\,c \Longrightarrow c = -9$

3.b)

$$\int_0^2 f(x)^2\,dx = \int_0^1 (3+x-9\,x^2)^2\,dx + \int_1^2 (-5-17(x-1)-9(x-1)^2+d\,(x-1)^3)^2\,dx =$$

$$= C_1 + 2\,d\int_1^2 (-5(x-1)^3-17(x-1)^4-9(x-1)^5)\,dx + d^2\int_1^2 (x-1)^6\,dx = C_1+C_2\,d+C_2\,d^2$$

$$C_2 = -123/10, \quad C_3 = 1/6$$

Luego el mínimo se alcanzará cuando

$$C_2 + 2C_3\,d = 0 \Longleftrightarrow d = \frac{369}{10}$$

Como $C_3 > 0$, se trata ciertamente de un mínimo.

3.c) Será spline natural si

$$S_1''(x_2) = 0 \Longleftrightarrow \frac{d^2}{dx^2}(-5-17(x-1)-9(x-1)^2+d\,(x-1)^3)|_{x=2} = 0,$$

es decir, si

$$-18+6\,d = 0 \Longleftrightarrow d = 3$$

que, evidentemente, es diferente del calculado previamente. Además, se ha de cumplir que $S_0''(x_0) = 0$, pero esto no se cumple nunca, por lo que la función dada no puede ser nunca un spline cúbico natural.

4.a) Integrando por partes resulta:

$$\int_{-1}^1 x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = -x\,\cos x + \mathrm{sen}\,x|_{-1}^1 = 2\,(\mathrm{sen}\,1 - \cos 1) = 0.602337357880$$

Por lo tanto, los errores cometidos son las diferencias de este con los valores aproximados, es decir,

n	10	20	40	80	160	320
I_n	0.60233394	0.60233714	0.6023373445	0.602337357048	0.602337357828	0.602337357876
E_n	$3.41*10^{-6}$	$2.129*10^{-7}$	$1.3303*10^{-8}$	$8.3138*10^{-10}$	$5.196*10^{-11}$	$3.*25^{-12}$

4.b) Teniendo en cuenta que el error es de la forma $E(h) = C\,h^p$, se tiene que

$$\frac{E(h)}{E(h/2)} = \frac{h^p}{(h/2)^p} = 2^p, \quad (h \to 0)$$

En consecuencia, se completa la tabla anterior con la fila de los cocientes anteriores

n	10	20	40	80	160	320
E_n	$3.41*10^{-6}$	$2.129*10^{-7}$	$1.3303*10^{-8}$	$8.3138*10^{-10}$	$5.196*10^{-11}$	$3.*25^{-12}$
E_n/E_{n+1}	16.08	16.0039	16.004	16.0004	15.99	

en donde se ve que debe ser

$$2^p = 16 \Longrightarrow p = 4$$