Cálculo Numérico (Ingeniería Industrial)

21 enero 2002 Primera convocatoria

Ejercicio 1

Dada la matriz

$$A = \mu \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\mu = \varepsilon = 10^{-7}$, y sabiendo que

$$A^{-1} = \frac{1}{2\varepsilon\mu} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

se pide:

i) Obtener el condicionamiento de A respecto de la norma $\| \cdot \|_\infty$. (0.5 puntos)

ii) Se consideran los sistemas lineales con matriz de coeficientes A y vector del segundo miembro:

$$(1,1,1)^T \quad \text{y} \quad (0.9, 1.1, 1)^T.$$

Si x y $(x + \delta x)$ son sus respectivas soluciones, obtener una cota superior para $\dfrac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. (1 punto)

iii) Teniendo en cuenta la expresión de A^{-1}, obtener las soluciones x y $(x + \delta x)$ de los sistemas anteriores. Comenta razonadamente los resultados obtenidos. (1 punto)

iv) ¿Es la cota obtenida en ii) una buena cota para ese error relativo? (0.5 puntos)

Ejercicio 2

Dada una función $f \in C^3(\mathbb{R})$ y los nodos $x_0 = a - h_1,\ x_1 = a,\ x_2 = a + h_2$, con $h_i > 0,\ i = 1, 2$, $a \in \mathbb{R}$, se pide:

i) Construir el polinomio de interpolación $p(x)$, de $f(x)$, con los nodos dados. (1 punto)

ii) Utilizando $p(x)$ obtener la fórmula

$$f''(a) \simeq \frac{2}{h_1 + h_2} \left[\frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2} - \frac{f(a) - f(a - h_1)}{h_1} \right]$$

(0.75 puntos)

iii) Calcular la expresión del error de la fórmula anterior. (0.75 puntos)

Ejercicio 3

a) Completar los coeficientes del método Runge-Kutta que viene dado por la siguiente tabla de Butcher:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
1/2 & a_{21} & & & \\
c_3 & (\sqrt{2}-1)/2 & a_{32} & & \\
1 & a_{41} & a_{42} & (2+\sqrt{2})/2 & \\
\hline
 & 1/6 & b_2 & (2+\sqrt{2})/6 & 1/6
\end{array}
$$

para que alcance al menos orden tres. (1 punto)

b) ¿Es este método de orden cuatro? (0.75 puntos)

c) Escribir las ecuaciones que definen el algoritmo del método. (0.75 puntos)

Ejercicio 4

Se pretende resolver la ecuación $f(x) = 0$, con $f(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{1}{2}$.

i) Calcular el polinomio que interpola a la función inversa de $f(x)$ utilizando los puntos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Calcular una aproximación a la raíz de $f(x) = 0$ empleando el polinomio obtenido. (1 punto)

ii) Para obtener una mejor aproximación de la raíz ($x^* = 1/2$) de $f(x) = 0$ aplicar el método de Newton tomando como iteración inicial $x_0 = 0.3$. Completar la siguiente tabla

	$e_n = \lvert x_n - x^*\rvert$	e_{n+1}/e_n	e_{n+1}/e_n^2	e_{n+1}/e_n^3
$x_0 = 0.3$				
$x_1 =$				
$x_2 =$				
$x_3 =$				

A partir de ella deducir el orden de convergencia del método.

(1 punto)

1 Soluciones

1.a)

$$\|A\|_\infty = \mu \max\{1+\epsilon, 1+\epsilon, 1\} = \mu\,(1+\epsilon)$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{2\epsilon\,\mu} \max\{2, 2\epsilon, 2\epsilon\} = \frac{1}{\epsilon\,\mu}$$

$$K_\infty(A) = \frac{1+\epsilon}{\epsilon} = 10^7 + 1$$

1.b)

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ A\,(x+\delta x) = b + \delta b \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le K(A)\,\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta b = (0.1, 0.1, 0) \Longrightarrow \|\delta b\| = 0.1 \\ \|b\| = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0.1$$

Luego,

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le (10^7+1)\,0.1 = 10^6 + 0.1$$

1.c)

$$A\,x = b \Longleftrightarrow x = A^{-1}\,b \text{ con } b = (1,1,1)$$

$$x = (0, 1/\mu, 1/\mu) = (0, 10^7, 10^7)$$

$$A\,(x+\delta x) = b + \delta b \Longleftrightarrow x + \delta x = A^{-1}\,(b+\delta b) \text{ con } b = (1,1,1)$$

$$x = \frac{1}{2\epsilon\mu}\,(-0.2, 2\epsilon, 2\epsilon) = (-10^{13}, 10^7, 10^7)$$

Debido al mal condicionamiento, pequeños cambios en los parámetros producen grandes cambios en la solución.

1.d)

$$\delta x = (-10^{13}, 0, 0) \Longrightarrow \|\delta x\| = 10^{13}, \|x\| = 10^7 \Longrightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 10^6,$$

por lo tanto, la cota hallada es buen y practicamente se alcanza.

2.a)

Construimos el polinomio de interpolación, que existe y es único, en la forma de Newton. La tabla de diferencias divididas es:

$$
\begin{array}{lll}
x_0 = a - h_1, & x_1 = a, & a_2 = a + h_2 \\
f(x_0), & f(x_1), & f(x_2) \\
f[x_0, x_1] = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}, & f[x_1, x_2] = \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} &
\end{array}
$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{h_1 + h_2}[\frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2} - \frac{f(a) - f(a - h_1)}{h_1}]$$

El polinomio de interpolación será:

$$p_2(x) = f(a - h_1) + \frac{f(a) - f(a - h_1)}{h_1}(x - a + h_1) + \frac{1}{h_1 + h_2}[\frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2} - \frac{f(a) - f(a - h_1)}{h_1}](x - a + h$$

2.b)

Aproximamos $f''(a) \approx p''(x)_{|x=a} = \dfrac{2}{h_1 + h_2}[\dfrac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2} - \dfrac{f(a) - f(a - h_1)}{h_1}]$

2.c)

Desarrollando en serie de Taylor en torno al punto a, resulta:

$$
\begin{aligned}
f(a + h_2) &= f(a) + h_2\, f'(a) + \frac{h_1^2}{2}\, f''(a) + \frac{h_2^3}{3!}\, f'''(\xi_2) \\
f(a - h_1) &= f(a) - h_1\, f'(a) + \frac{h_1^2}{2}\, f''(a) - \frac{h_1^3}{3!}\, f'''(\xi_1)
\end{aligned}
$$

Eliminando los téminos en f'(a) resulta.

$$f''(a) = \frac{2}{h_1 + h_2}[\frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2} - \frac{f(a) - f(a - h_1)}{h_1}] + \frac{h_1^2 f'''(\xi_1) - h_2^2 f'''(\xi_2)}{3(h_1 + h_2)}$$

El error en la fórmula de derivación será:

$$\frac{h_1^2 f'''(\xi_1) - h_2^2 f'''(\xi_2)}{3(h_1 + h_2)}$$

3.a)

Los coeficientes se determinan aplicando las condiciones de orden progresivamente.

Las condiciones a satisfacer:

$$
\begin{array}{ll}
\text{definición:} & a_{21} = c_2 \\
 & a_{31} + a_{32} = c_3 \\
 & a_{41} + a_{42} + a_{43} = c_4 \\
\text{orden 1:} & b^T\, e = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \\
\text{orden 2:} & b^T\, c = b_2\, c_2 + b_3\, c_3 + b_4\, c_4 = \frac{1}{2} \\
\text{orden 3:} & b^T\, (c\, c) = b_2\, c_2^2 + b_3\, c_3^2 + b_4\, c_4^2 = \dfrac{1}{3} \\
 & b^T\, A\, c = b_3\, a_{32}\, c_2 + b_4\, a_{42}\, c_2 + b_4\, a_{43}\, c_3 = \dfrac{1}{6} \\
\text{orden 4:} & b^T\, (c\, c\, c) = b_2\, c_2^3 + b_3\, c_3^3 + b_4\, c_4^3 = \dfrac{1}{4} \\
 & b^T\, c\, A\, c = b_3\, c_3\, a_{32}\, c_2 + b_4\, c_4\, a_{42}\, c_2 + b_4\, c_4\, a_{43}\, c_3 = \dfrac{1}{8} \\
 & b^T\, A\, c\, c = b_3\, a_{32}\, c_2^2 + b_4\, a_{42}\, c_2^2 + b_4\, a_{43}\, c_3^2 = \dfrac{1}{12} \\
 & b^T\, A\, A\, c = b_4\, a_{43}\, a_{32}\, c_2 = \dfrac{1}{24}
\end{array}
$$

que se particularizan en nuestro caso en las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\text{definición:} \quad & a_{21} = 1/2 \\
& a_{32} + (\sqrt{2}-1)/2 = c_3 \\
& a_{41} + a_{42} + (2+\sqrt{2})/2 = 1 \\
\text{orden 1:} \quad & b^T\, e = 1/6 + b_2 + (2+\sqrt{2})/6 + 1/6 = 1 \\
\text{orden 2:} \quad & b^T\, c = b_2\, 1/2 + (2+\sqrt{2})/6\, c_3 + 1/6 = \tfrac{1}{2} \\
\text{orden 3:} \quad & b^T\, (c\, c) = b_2\, 1/4 + b_3\, c_3^2 + 1/6 = \frac{1}{3} \\
& b^T\, A\, c = (2+\sqrt{2})/6\, a_{32}\, 1/2 + 1/6\, a_{42}\, 1/2 + 1/6\, (2+\sqrt{2})/2\, c_3 = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Este sistema se puede resolver facilmente como sigue:

De la cuarta ecuación: $b_2 = (2-\sqrt{2})/6$
Sustituyendo en la quinta ecuación: $c_3 = 1/2$
Con este valor de c_3 la sexta ecuación es una identidad.
Sustituyendo en la segunda ecuación: $a_{32} = (2-\sqrt{2})/2$
Sustituyendo en la séptima ecuación: $a_{42} = -\sqrt{2}/2$
Sustituyendo en la tercera ecuación: $a_{41} = 0$
En consecuencia, el método está determinado y tiene orden de consistencia 3, al menos.

3.b)

Para ver que es al menos de orden 4 hay que comprobar que se cumplen las condiciones para este orden son:

$$
\begin{aligned}
\text{orden 4:} \quad & b^T\, (c\, c\, c) = b_2\, c_2^3 + b_3\, c_3^3 + b_4\, c_4^3 = \frac{1}{4} \\
& b^T\, c\, A\, c = b_3\, c_3\, a_{32}\, c_2 + b_4\, c_4\, a_{42}\, c_2 + b_4\, c_4\, a_{43}\, c_3 = \frac{1}{8} \\
& b^T\, A\, c\, c = b_3\, a_{32}\, c_2^2 + b_4\, a_{42}\, c_2^2 + b_4\, a_{43}\, c_3^2 = \frac{1}{12} \\
& b^T\, A\, A\, c = b_4\, a_{43}\, a_{32}\, c_2 = \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

Basta sustituir y hacer cuentas para confirmar que es cierto.

3.c)

Las ecuaciones que describen el algoritmo se obtienen a partir de la matriz de Butcher, y son:

$$
\begin{aligned}
& y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{6} g_1 + \frac{2-\sqrt{2}}{6}\, g_2 + \frac{2+\sqrt{2}}{6}\, g_3 + \frac{1}{6}\, g_4 \right] \\
& g_1 = f(t_n, y_n) \\
& g_2 = f(t_n + \frac{1}{2}\, h, y_n + h\, \frac{1}{2}\, g_1) \\
& g_3 = f(t_n + \frac{1}{2}\, h, y_n + h\, \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\, g_1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\, g_2 \right)) \\
& g_4 = f(t_n + h, y_n + h\, \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\, g_2 + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\, g_3 \right))
\end{aligned}
$$

4.a)

La interpolación inversa consiste en buscar el polinomio de interpolación de la función inversa, caso de que esta esté bien definida. Para ello, se cambian los papales de las variables: $x = f^{-1}(y)$, por lo que se trabaja con la tabla siguiente:

y_k	$f^{-1}(y_k)$	$f^{-1}[\_,\_]$	$f^{-1}[\_,\_,\_]$
-3	-1	$2/5$	$1/15$
$-1/2$	0	$2/3$	
1	1		

Así, $f^{-1}(y) \approx p_2(y) = -1 + \frac{2}{5}\,(y+3) + \frac{1}{15}\,(y+3)(y+\frac{1}{2})$

Por lo tanto, $\alpha = f^{-1}(0) \approx p_2(0) = \frac{1}{3}$

4.b)

Método de Newton para

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + x(1 + x(-\frac{1}{2} + x))$$
$$f'(x) = 3x^2 - x + 1 = 1 + x(-1 + 3x),$$

escritos los polinomios en forma encapsulada. El algoritmo de Newton

$$x_0 = 0.3$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x)},$$

nos conduce a la tabla siguiente:

	$e_n = \lvert x_n - x^*\rvert$	e_{n+1}/e_n	e_{n+1}/e_n^2	e_{n+1}/e_n^3
$x_0 = 0.3$	0.2	-0.123711	-0.618557	-3.09278
x_1 =0.524742	-0.0247423	0.0199541	-0.806476	32.5951
x_2 = 0.500494	-0.000493708	0.000395044	-0.800157	1620.71
x_3 =0.50000019	- 1.950368*10^{-7}	1.559711*10^{-7}	- 0.799700	4.10025*10^6

De la tabla se deduce que e_{n+1}/e_n^2 tiende a una constante, mientras que e_{n+1}/e_n tiende a cero y e_{n+1}/e_n^3 tiende a infinito; por lo tanto, el orden de convergencia será 2.

Ya sabíamos que el método de Newton es convergente cuadráticamente si la raiz es simple, lo uqe viene confirmado por la tabla.